DM 9 CHUTES LIBRES CORRECTION

A/ Parabole de sûreté

1. Voir cours : $z(x)=\tan\alpha\ x-\frac{g^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2$

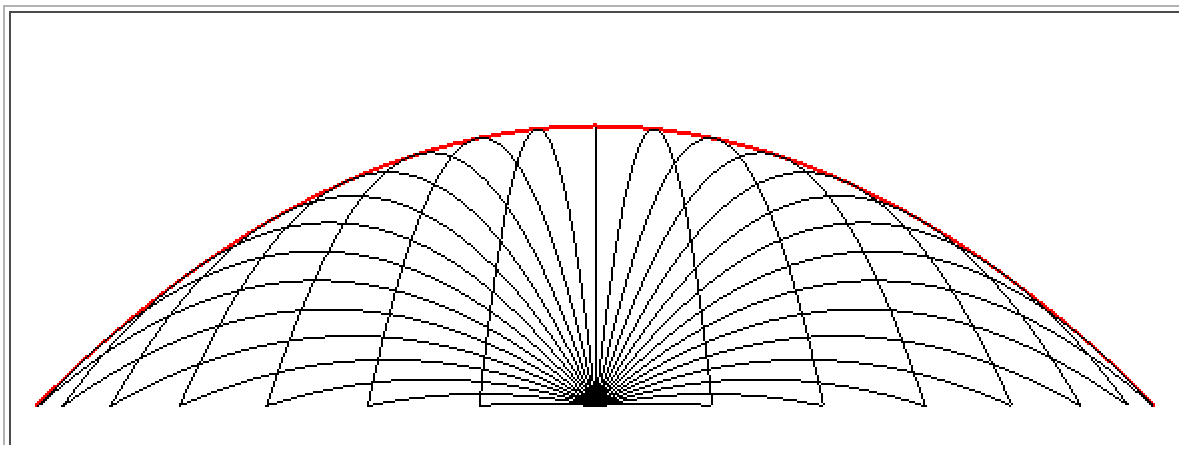
2. Voir cours : $h=\frac{v_0^2}{2g}$

3. On remplace $z_0=x_0t-\frac{g}{2v_0^2}(1+t^2)x^2$ avec $\frac{g}{v_0^2}=\frac{1}{2h}$ donc $z_0=x_0t-\frac{(1+t^2)}{4h}x_0^2$

4. On arrange l'équation (forme canonique) : $z_0=x_0t-\frac{x_0^2}{4h}-\frac{x_0^2}{4h}t^2\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{4h}t^2-x_0t+z_0+\frac{x_0^2}{4h}=0$
   ou encore (on enlève les dénominateurs) : $x_0^2t^2-4hx_0t+4hz_0+x_0^2=0$.
   Il y a au moins une solution (ou deux) ssi le discriminant est positif ou nul :
   $\Delta=(4hx_0)^2-4x_0^2(4hz_0+x_0^2)$. $\Delta\geq0\Leftrightarrow4h^2-(4hz_0+x_0^2)\geq0\Leftrightarrow4hz_0\leq4h^2-x_0^2$ et finalement $z_0\leq f(x_0)$ avec $\boxed{f(x_0)=h-\frac{1}{4h}x_0^2}$

5. et 6. Parabole de concavité vers le bas, maximale et valant h en $x_0=0$, donc symétrique par rapport à l'axe des z_0 . Tous ceux qui sont en-dessous sont susceptibles d'être touchés par le boulet. Inversement, ceux qui sont au-dessus seront épargnés quel que soit l'angle de tir.

   L'enveloppe de toutes les trajectoires des tirs issus d'un point donné avec une vitesse de départ constante est aussi une parabole dénommée *parabole de tir ou de sûreté*.



B/ Rebond sur un plan incliné

L'énoncé impose les axes de projections (X, Y) : il est vraiment conseillé de les respecter !!

(Mais l'axe Z est inutile : le mouvement reste dans le plan des conditions initiales, puisque aucune force ne fait sortir le mobile du plan).

L'étude dynamique (à faire au moins une fois dans le DM) donne toujours la même intégration vectorielle de $\vec{a}=\vec{g}$: $\vec{V}=\vec{g}\,t+\vec{V}_0$, puis $\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2+\vec{V}_0\,t$ (d'où l'intérêt certain de l'intégration vectorielle, générale).

On passe aux coordonnées (projections) sur les axes : $\vec{V}_0=\begin{pmatrix} V_0\cos\beta \\ V_0\sin\beta \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, l'angle entre le vecteur $\vec{g}$ et $\vec{e_X}$ est $\frac{\pi}{2}+\alpha$, donc $g_X=g\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-g\sin\alpha$; on trouve g_Y en ajoutant $+\frac{\pi}{2}$ à cet angle : $g_Y=g\cos(\pi+\alpha)=-g\cos\alpha$.

D'où les équations horaires de la vitesse : $\vec{V}=\begin{pmatrix} V_0\cos\beta-g\sin\alpha\ t \\ V_0\sin\beta-g\cos\alpha\ t \end{pmatrix}$, et celles de la position qui seront probablement utiles : $\vec{OM}=\begin{pmatrix} V_0\cos\beta\ t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\ t^2 \\ V_0\sin\beta\ t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\ t^2 \end{pmatrix}$.

En effet, au moment du rebond, on a par définition $Y=0$, et on obtient la date (non nulle, comme pour le calcul de la portée) de contact correspondante : $t=\frac{2V_0}{g}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$.

On peut calculer le X du contact, mais cela ne semble pas très utile…

Le vecteur vitesse lors du choc est alors $\vec{V}=V_0\begin{pmatrix} \cos\beta-2\tan\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$.

Divers essais de tracés au brouillon montrent que si le mobile arrive perpendiculairement au plan incliné, il repartira en arrière, et sur la même trajectoire, puisque la norme de la vitesse est inchangée lors du rebond : il repassera alors par O, ce que l'on souhaite.

Sans avoir prouvé que cette solution est la seule possible, on trouve alors que $V_X=0 \Leftrightarrow \cos\beta-2\tan\alpha\sin\beta=0$ soit $\boxed{\tan\beta=\frac{1}{2\tan\alpha}}$. AN : $\beta=40{,}9\,°$.