

## Modèle de Thomson

1. L'énoncé impose les coordonnées cartésiennes, et on obtient très simplement :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + 2\alpha \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

2. En régime permanent ne restent plus que les SP des équadiffs obtenues : elles sont d'ordre 2, à coefficients constants positifs, donc les solutions générales homogènes tendent vers 0.

Il n'y a donc aucun mouvement sur  $y$  et sur  $z$  en RP, et la SP sur  $x$  doit être trouvée en passant dans les complexes, car c'est une sinusoïde de pulsation égale à celle de l'excitation, donc du champ électrique, soit  $\omega$ .

3. On peut donc poser  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$  soit  $x(t) = X \exp i(\omega t + \varphi) = X \exp i \omega t$

pour déterminer l'amplitude  $X = |\underline{X}| = \frac{e E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$  .

L'accélération est la dérivée seconde de la position, donc par les complexes, on trouve que l'amplitude est multipliée par  $\omega^2$  (le signe disparaît) :

$$A = \frac{e E_0 \omega^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

4. On garde le terme dominant au dénominateur :  $A = \frac{e E_0 \omega^2}{m \omega_0^2}$
5. La puissance rayonnée est donc proportionnelle à  $\omega^4$  donc beaucoup plus importante (16 fois) pour le violet que pour le rouge : le violet de la lumière blanche est donc rayonné dans toutes les directions, le ciel semble bleu violet, et le soleil jaune orange (couleur complémentaire du bleu violet).

## Mouvement palet

1. RFD sur  $x = \text{cours}$  :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$  ,  $K = \frac{\alpha_F}{m}$  ,  $x_{\text{éq}} = l_0$
2. Equadiff d'ordre avec second membre. Selon le signe du discriminant  $\Delta$  de l'éq homogène, on a 3 possibilités :  $\Delta > 0 \Rightarrow$  régime apériodique,  $\Delta = 0 \Rightarrow$  régime critique,  $\Delta < 0 \Rightarrow$  régime pseudopériodique.
3.  $\Delta = 0$  :  $K^2 - 4\omega_0^2 = 0$  , et comme tout est positif :  $K = 2\omega_0$  donc  $\alpha_F = 2\sqrt{k_0 m}$

La SP est  $x_p = x_{\text{éq}} = l_0$  . La SGH est  $x_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$  car la racine double est

$$-\frac{K}{2} = -\omega_0 \text{ .}$$

$x(0)=B+l_0=l_0$  :  $B=0$  donc  $x(t)=Ate^{-\omega_0 t}+l_0$  et  $\dot{x}(t)=Ae^{-\omega_0 t}-A\omega_0 te^{-\omega_0 t}$   
 donc  $A=-v_0$  et  $x(t)=l_0-v_0 t e^{-\omega_0 t}$

4.  $x$  min donc  $\dot{x}(t)=Ae^{-\omega_0 t}-A\omega_0 te^{-\omega_0 t}=0$  :  $t_{\text{MIN}}=\frac{1}{\omega_0}$  et en remplaçant :

$x_{\text{MIN}}=l_0-\frac{v_0}{\omega_0 e}$  car  $e^{-1}=\frac{1}{e}$ . Allure : retour vers  $x_{\text{éq}}=l_0$  qui est aussi la valeur initiale, sans oscillations ; tangente à l'origine négative  $(-v_0)$ .

5. On remplace  $v(t)=\dot{x}(t)=v_0 e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t-1)$  donc

$\dot{v}(t)=-\omega_0 v_0 e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t-1)+v_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t}=v_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t}(2-\omega_0 t)$  :  $v$  est donc croissante jusqu'à  $t_{\text{MAX}}=\frac{2}{\omega_0}$  et décroissante ensuite, pour tendre vers 0.

6. C'est bien à  $t_{\text{MAX}}=\frac{2}{\omega_0}$  : dès que la vitesse du patin décroît, le contact est perdu,

car le patin ne peut que pousser le palet et ne le retient pas ; le palet continuera son mouvement de façon uniforme.

La vitesse vaut à ce moment :  $v(t_{\text{MAX}})=v_0 e^{-2}(2-1)=v_0 e^{-2}=\frac{v_0}{e^2}$

7. Avant le choc (pas de contact du palet avec le dispositif) :  $E_m=E_c=\frac{1}{2}m v_0^2$

8. Après le choc (plus de contact) :  $E'_m=E'_c=\frac{1}{2}m v_0^2 e^{-4}$ . On peut définir le

coefficient de restitution du choc comme le rapport des énergies mécaniques :

$r=e^{-4}=1,83\%$ , donc 98,17% de l'énergie mécanique a disparu et a été transformée en énergie thermique par les frottements de l'amortisseur.

Ce dispositif est donc très efficace en tant que système de freinage.

## Réponse harmonique stabilisée

1. Définition A fixe, pas de frottements

BDF :  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{F}_1=-k(L_1-l_0)\vec{u}_x$ ,  $\vec{F}_2=-k(L_2-l_0)(-\vec{u}_x)$

RFDx :  $m\ddot{x}=-T\sin\theta-k(l+x-l_0)+k(l-x-l_0)$

RFDz :  $0=+T\cos\theta-mg$

Petits angles :  $\cos\theta\approx 1$

On a  $x=l\sin\theta$  :  $m\ddot{x}+\left(2k+m\frac{g}{l}\right)x=0$ , donc  $\omega_0=\sqrt{2\frac{k}{m}+\frac{g}{l}}$

2. Seule différence :  $L_1=l+x-y$  :  $m\ddot{x}+\left(2k+m\frac{g}{l}\right)x=ky$  donc  $\ddot{x}+\omega_0^2 x=\Omega^2 Y_m \cos\omega t$

En régime établi, même pulsation pour  $x$  et  $y$  :  $x(t)=X_m \cos(\omega t+\varphi)$ , et on passe dans C

$$x(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}, \quad y(t) = Y_m e^{j\omega t} : \underline{X}_m = Y_m \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{donc} \quad X_m = Y_m \frac{\Omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad \text{et}$$

$$\varphi = 0 \text{ pour } \omega < \omega_0, \quad \varphi = \pi \text{ pour } \omega > \omega_0.$$

3. Terme d'amortissement : passe-bas résonnant.

4. Il faut redémontrer que  $X_{m,\max} = X_m \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  : avec  $X_{m,\max} = 1,1 X_m$ , on trouve  $Q = 0,9$ .

## Deux ressorts

a)

b) Réf : Terre, galiléenne

Système : {M;m}

Contrainte : mvt selon x =>  
accélération selon x (le poids et réaction se compensent alors)

Bdf :

Poids  $\vec{P}$ , réaction normale  $\vec{R}_N$  (pas de frottements), forces de rappel élastiques

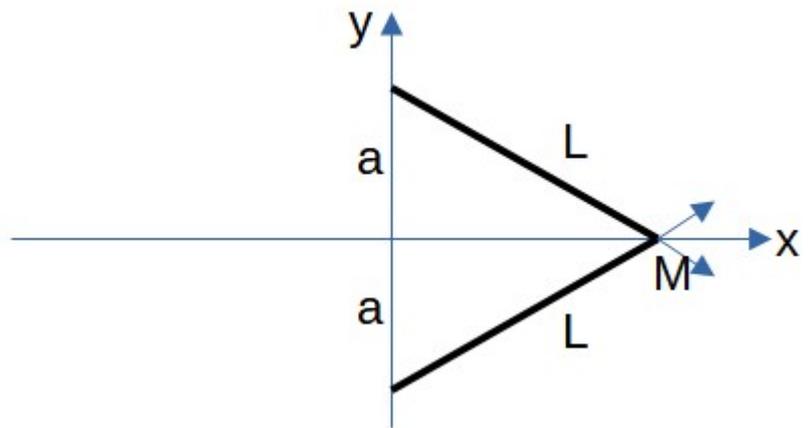
$$\vec{F}_1 = -k(L - L_0)\vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -k(L - L_0)\vec{u}_2 \quad \text{avec} \quad L = \sqrt{a^2 + x^2}$$

RFD sur x :  $ma_x = F_{1x} + F_{2x}$ , avec  $\frac{u_{1x}}{x} = \frac{1}{L}$  (Thalès par exemple, ou trigo avec le cosinus de l'angle)

$$\text{D'où : } ma_x = -2k(L - L_0)\frac{x}{L} \quad \text{donc l'ED : } m\ddot{x} + 2kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0$$

c) On raye les dérivées partielles pour trouver la ou les solutions constantes :

- $x_0 = 0$  est toujours une solution
- les autres vérifient  $\sqrt{a^2 + x^2} = L_0$  soit  $x^2 = L_0^2 - a^2$  qui n'existent que si  $a < L_0$  et sont alors  $x_1 = +\sqrt{L_0^2 - a^2}$  et  $x_2 = -\sqrt{L_0^2 - a^2}$ , symétrique.



Suspension de voiture

1.  $z = L + R$       $\vec{u}_{R \text{ vers } S} = +\vec{u}_z$

2. Ref: Terre, galiléen; Sys: Châssis; Géométrie: immobilité; BDF:  $\vec{P}$ ,

appel élastique  $\vec{F} = -k(L - L_0)\vec{u}_{R \rightarrow \Pi}$ ; RDF:  $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$ ;

sur  $(Og)$ :  $0 = -mg - k(L - L_0) \Rightarrow L_{Eq} = L_0 - \frac{mg}{k}$ , bien  $< L_0$ :

normal car ressort comprimé.  $z_{Eq} = L_{Eq} + R$ .

3. a) Étude avec frottements en plus  $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$  donc:

$$m \ddot{z} = -mg - k(L - L_0) - \lambda \dot{z}$$

↳ inconnue donc pas une équation diff, mais Q1:

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}(z - R - L_0) - \frac{\lambda}{m} \dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m}(L_0 + R)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{Eq}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$

$$\Rightarrow Q = \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$$

↳ on reconnaît

$$z_{Eq} \times \frac{k}{m}$$

3. b) on est alors en régime aperiodique critique  $\Leftrightarrow \Delta_{E.CAR} = 0$

$$(E.CAR): r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$$

donc  $\lambda = 2\sqrt{km}$

3. c) Racine double  $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ : solution générale:

$$z(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t) + z_{Eq}$$

CI:  $z(0) = z_{Eq} - h \quad \Rightarrow B = -h$

$\dot{z}(0) = 0$  avec  $\dot{z}(t) = A \exp(-\omega_0 t) + (At + B)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t)$

donc  $0 = A - B\omega_0 \quad \Rightarrow A = B\omega_0 = -h\omega_0$

donc  $z(t) = z_{Eq} - h(1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$

4.  $m$  augmenté donc  $Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$  aussi  $\rightarrow$  régime pseudo-periodique: oscillations

inconfortables.

$$\Delta = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right) < 0 \quad \Delta = \left( j 2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right)^2$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\omega_0}{Q} \pm j 2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right] = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Solution générale  $z(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) + z_{Eq}$

CI:  $z(0) = z_{EQ} - h$  ;  $A = -h$

$$\dot{z}(t) = (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right)$$

avec  $\dot{z}(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = B\omega - A \frac{\omega_0}{2Q}$

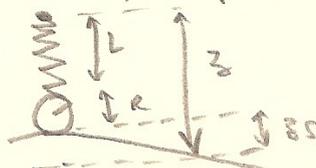
soit  $B = -\frac{h}{2Q} \frac{\omega_0}{\omega} = -h \frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = -\frac{h}{\sqrt{4Q^2-1}}$

Finalment:  $z(t) = z_{EQ} - h \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \left[\cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \sin \omega t\right]$

5. a) On a simplement  $x = vt$  (vitesse uniforme selon  $x$ ).

b) Énoncé  $f = -\lambda \vec{v}_{chaus/paves}$ ; or  $\vec{v}_{ch/R} = \vec{v}_{ch/Terre} - \vec{v}_{R/Terre}$ .

On a de plus, pour la longueur  $L$  du ressort



$$z = L + R + z_s$$

c) L'équation est

$$m \ddot{z} = -mg - k(L - L_0) - \lambda(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

$\downarrow$   
 $z - R - z_s$

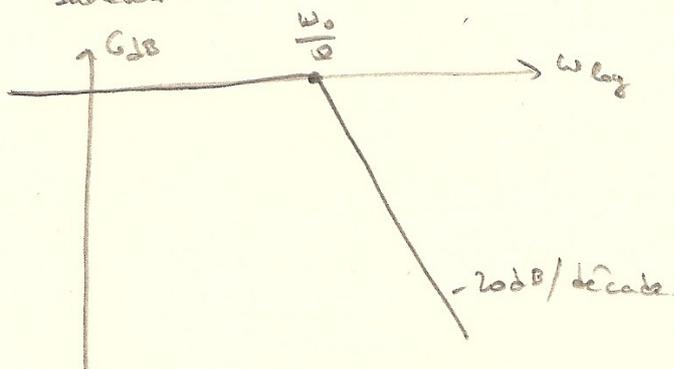
soit  $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \underbrace{-g + \frac{k}{m}(L_0 + R)}_{\frac{k}{m} z_{EQ}} + \frac{k}{m} z_s + \frac{\lambda}{m} \dot{z}_s$

d) donc  $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_s + \omega_0^2 z_s$  Car  $\frac{k}{m}(z - z_{EQ}) = \omega_0^2 u$

e)  $\underline{H} = \frac{j \frac{\omega_0}{Q} \omega + \omega_0^2}{-\omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega + \omega_0^2}$

	$\underline{H}$	$\varphi$	$G$	$G_{dB}$
TBF	1	0	1	0
THF	$-j \frac{\omega_0}{Q\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\omega_0}{Q\omega}$	$20 \log \frac{\omega_0}{Q\omega}$ $-20 \log \omega$

Filtre passe bas d'ordre 2, mais avec une pente THF de  $-20 \text{ dB/décade}$  seulement.



f)  $\Rightarrow$  pour  $\omega \leq \frac{\omega_0}{2Q}$  soit  $\frac{2\pi}{\Lambda} v \leq \frac{\omega_0}{2Q}$   
 $\Rightarrow v \leq \frac{\omega_0 \Lambda}{4\pi Q}$ , et l'oscillation du châssis suit celle du sol, ce qui est assez inconfortable si la vitesse est élevée.  
 $\rightarrow$  Pour une vitesse bien plus élevée, les oscillations sont filtrées et le châssis ne bouge presque plus.

## Équation proies – prédateurs (de Volterra-Lotka)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma) \end{cases} \quad \text{où } (\alpha, \beta, \delta, \gamma) \text{ sont 4 constantes positives.}$$

a) Première affirmation :  $\frac{dy}{dt} = -\gamma y$  , de solution générale  $y(t) = Y_0 e^{-\gamma t}$  :  
décroissance exponentielle.

Deuxième affirmation :  $\frac{dx}{dt} = \alpha x$  , de solution générale  $x(t) = X_0 e^{\alpha t}$  : croissance  
exponentielle.

Troisième affirmation :  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{préd}} = -\beta(yx)$  (variation due aux prédateurs seuls).

Quatrième affirmation : idem 3ème pour les prédateurs.

b) Il faut se débarrasser de  $y$  : on ne peut l'exprimer qu'avec l'équation des proies :

$$y = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta x} \frac{dx}{dt} .$$

Dans l'équation des prédateurs, on le remplace :  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\beta x^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\beta x} \frac{d^2 x}{dt^2}$  donc

$$\frac{1}{\beta x^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\beta x} \frac{d^2 x}{dt^2} = \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta x} \frac{dx}{dt} \right) (\delta x - \gamma) .$$

On peut essayer de l'arranger un peu :  $\frac{dx}{dt} - x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left( \alpha x^2 - x \frac{dx}{dt} \right) (\delta x - \gamma)$  soit

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} - [1 + x(\delta x - \gamma)] \frac{dx}{dt} + \alpha x^2 (\delta x - \gamma) = 0$$

c) Dérivées temporelles nulles :  $\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y) \\ 0 = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x_{\text{éq}} = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_{\text{éq}} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$