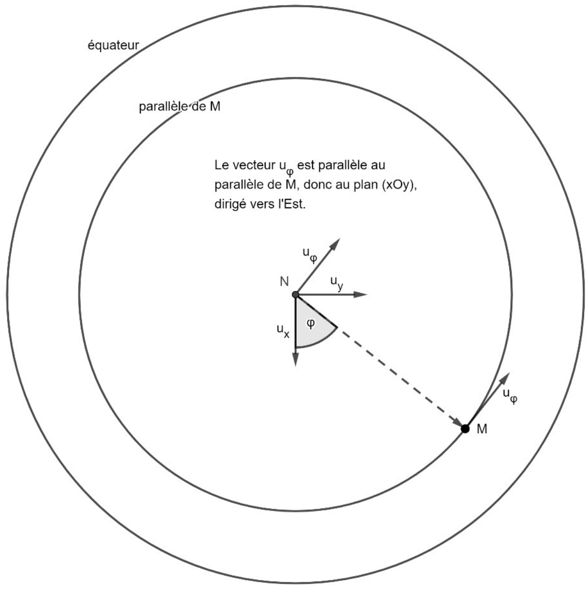
DM10 CORRECTION

1. Base sphérique



1. Vue de dessus (axe de rotation terrestre dans l'œil) :

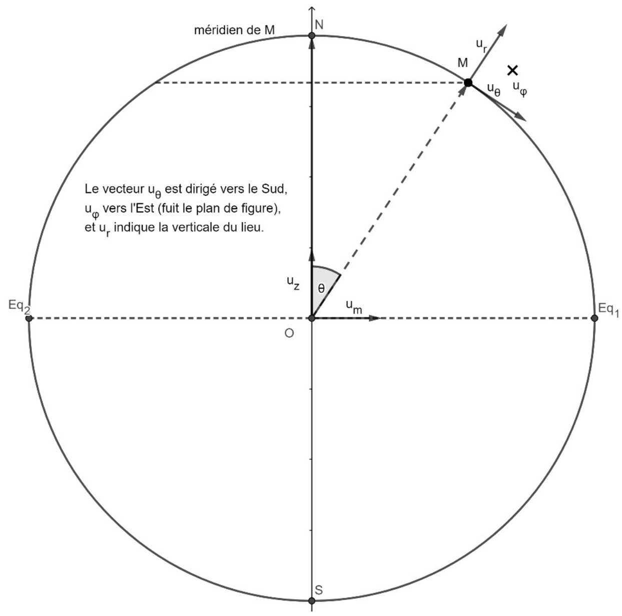
   D'après le schéma, on a l'angle $(\vec{u}_x,\vec{u}_\varphi)=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$, et avec le théorème de Chasles sur les angles orientés :

   $(\vec{u}_y,\vec{u}_\varphi)=(\vec{u}_y,\vec{u}_x)+(\vec{u}_\varphi,\vec{u}_y)=-\dfrac{\pi}{2}+\varphi+\dfrac{\pi}{2}=\varphi$

   Avec la formule du produit scalaire (**toujours** cos, les 2 normes valant 1 ici), et la simplification de $\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (formule d'addition au pire), on trouve :

   $\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi\ \vec{u}_x+\cos\varphi\ \vec{u}_y$

   $\vec{u}_\varphi$ est le seul vecteur toujours parallèle à l'un des plans cartésiens.



   Vue en coupe (méridien de M) :

   On définit le vecteur $\vec{u}_m$ comme indiqué.

   On voit que $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)=\theta$ et que $(\vec{u}_m,\vec{u}_r)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$, et donc $\vec{u}_r=\sin\theta\ \vec{u}_m+\cos\theta\ \vec{u}_z$.

   Chasles encore :

   $(\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)=(\vec{u}_\theta,\vec{u}_r)+(\vec{u}_r,\vec{u}_z)=+\dfrac{\pi}{2}+\theta$ et

   $(\vec{u}_\theta,\vec{u}_m)=(\vec{u}_\theta,\vec{u}_r)+(\vec{u}_r,\vec{u}_m)=+\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$:

   $\vec{u}_\theta=\cos\theta\ \vec{u}_m-\sin\theta\ \vec{u}_z$

   En reprenant la première figure, et en y ajoutant $\vec{u}_m$, axifuge, on trouve de même, très facilement $\vec{u}_m=\cos\varphi\ \vec{u}_x+\sin\varphi\ \vec{u}_y$

   Finalement : $\boxed{\begin{cases}\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x+\sin\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y+\cos\theta\ \vec{u}_z\\ \vec{u}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x+\cos\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y-\sin\theta\ \vec{u}_z\\ \vec{u}_\varphi=-\sin\varphi\ \vec{u}_x+\cos\varphi\ \vec{u}_y\end{cases}}$ (les courageux peuvent vérifier que $\vec{u}_p\cdot\vec{u}_q=0$ si *p* et *q* sont différents et 1 s'ils sont identiques : la base est bien orthonormée).

2. On calcule, les vecteurs cartésiens étant évidemment fixes (c'est le principe) :
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt}=(\mathring{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\mathring{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)\ \vec{u}_x+(\mathring{\theta}\cos\theta\sin\varphi+\mathring{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)\ \vec{u}_y-\mathring{\theta}\sin\theta\ \vec{u}_z\quad ,$$
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=(-\mathring{\theta}\sin\theta\cos\varphi-\mathring{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)\ \vec{u}_x+(-\mathring{\theta}\sin\theta\sin\varphi+\mathring{\varphi}\cos\theta\cos\varphi)\ \vec{u}_y-\mathring{\theta}\cos\theta\ \vec{u}_z\quad ,$$
$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}=(-\mathring{\varphi}\cos\varphi)\ \vec{u}_x+(-\mathring{\varphi}\sin\varphi)\ \vec{u}_y$$

3. On voit que $\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\mathring{\theta}\cos\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x+\mathring{\theta}\cos\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y-\mathring{\theta}\sin\theta\ \vec{u}_z-\mathring{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\ \vec{u}_x+\mathring{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\ \vec{u}_y$: on reconnaît $\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\mathring{\theta}\ \vec{u}_\theta+\mathring{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi}$.

De même $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\mathring{\theta}\sin\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x-\mathring{\theta}\sin\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y-\mathring{\theta}\cos\theta\ \vec{u}_z-\mathring{\varphi}\cos\theta\sin\varphi\ \vec{u}_x+\mathring{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\ \vec{u}_y$: $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\mathring{\theta}\ \vec{u}_r+\mathring{\varphi}\cos\theta\ \vec{u}_\varphi$.

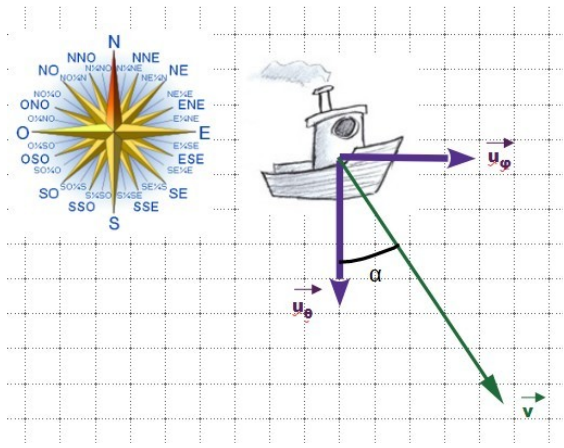
Plus difficile pour le dernier... On voit que la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire n'a jamais de coordonnée sur ce vecteur, elle lui est donc perpendiculaire, et c'est normal (cf chapitre 1 de cinématique pour la méthode) :
$\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{u})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|^2)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1)=0$ (on peut généraliser à tout vecteur de norme constante : on retrouve que si le mouvement est uniforme, le vecteur accélération est nécessairement perpendiculaire au vecteur vitesse).

$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ doit donc s'exprimer seulement sur $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, et $\vec{u}_z$ n'apparaît pas dans $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$. On l'élimine :
$$\sin\theta\vec{u}_r+\cos\theta\vec{u}_\theta=\sin^2\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x+\sin^2\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y+\cos^2\theta\cos\varphi\ \vec{u}_x+\cos^2\theta\sin\varphi\ \vec{u}_y=\cos\varphi\ \vec{u}_x+\sin\varphi\ \vec{u}_y$$
pour obtenir finalement $\boxed{\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}=-\mathring{\varphi}\sin\theta\vec{u}_r-\mathring{\varphi}\cos\theta\vec{u}_\theta}$

4. On part de $\vec{OM}=r\vec{u}_r$ pour en tirer $\vec{v}=\frac{d\vec{OM}}{dt}=\mathring{r}\vec{u}_r+r\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\mathring{r}\vec{u}_r+r\mathring{\theta}\ \vec{u}_\theta+r\sin\theta\ \mathring{\varphi}\ \vec{u}_\varphi$ #

Les dérivées des autres vecteurs de la base permettraient de calculer le vecteur accélération...

2. Bateau à cap constant



(a) La base sphérique réduite, sur la surface terrestre, est $(\vec{u}_\theta ; \vec{u}_\varphi)$, respectivement vers le Sud et vers l'Est.

On trouve donc $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$.

(b) Sur cette base, en simplifiant $(\dot{r}=0)$:
$\vec{v}\begin{pmatrix} R\dot{\theta} \\ R\sin\theta\,\dot{\varphi} \end{pmatrix}$

(c) En égalant, on trouve $\dot{\theta}=\frac{v_0}{R}\cos\alpha$, qu'on intègre, donc **crochets** : $[\theta(t)]_0^t=\frac{v_0}{R}\cos\alpha\,[t]_0^t$ soit $\theta(t)=\theta_0+\frac{v_0}{R}\cos\alpha\; t$.

(d) L'autre équation donne $\dot{\varphi}=\frac{v_0}{R}\sin\alpha\frac{1}{\sin\theta}$ qu'il faut intégrer **par rapport au temps**, donc on doit remplacer $\theta(t)$: $[\varphi(t)]_0^t=\frac{v_0}{R}\sin\alpha\int_0^t\frac{dt}{\sin\left(\theta_0+\frac{v_0}{R}\cos\alpha\; t\right)}$.

Avec la primitive d'essai : $F(t)=\ln\left|\tan\left[\frac{1}{2}\left(\theta_0+\frac{v_0}{R}\cos\alpha\; t\right)\right]\right|$, il sort la constante $\frac{v_0}{R}\cos\alpha$ en dérivant (composée), donc :

$$[\varphi(t)]_0^t=\frac{v_0}{R}\sin\alpha\frac{R}{v_0\cos\alpha}\left[\ln\left|\tan\left[\frac{1}{2}\left(\theta_0+\frac{v_0}{R}\cos\alpha\; t\right)\right]\right|\right]_0^t .$$

On retrouve bien ce qui est demandé puisque $\varphi(0)=0$.

(e) La longitude est un angle, obtenu par un produit, donc en système international c'est-à-dire en radians (mais on peut laisser la calculatrice en degrés pour le calcul des lignes trigonométriques des angles en degrés).

Cap sud-est : $\alpha=45°$, arrivée à l'équateur de colatitude $\theta_1=90°$, ce qui donne $\varphi_1=1{,}317\text{ rad}=75{,}5°$.

(f) On revient à la première équation : $\theta_1=\theta_0+\frac{v_0}{R}\cos\alpha\, T_{\text{loxo}}$, avec les angles en radians, ce qui donne (conversions SI inutiles pour R et la vitesse) : $T_{\text{loxo}}=18{,}87\text{ jours}=18\text{ j}\,21\text{ h}$

Le mouvement est uniforme, donc $L_{\text{loxo}}=v_0 T_{\text{loxo}}=9434\text{ km}$ (la Terre, c'est grand).

(g) Pure AN : $L_{\text{ortho}}=8610\text{ km}$ et une durée de voyage de $T_{\text{ortho}}=17{,}22\text{ jours}=17\text{ j}\,05\text{ h}$, nettement inférieures.