TD 16 – ÉNERGIE

1. En vacances

Une voiture tracte un caravane de masse $m = 800\ kg$ sur une route rectiligne et horizontale.

L'ensemble se déplace à une vitesse $v = 72{,}0\ km.h^{-1}$. L'intensité de pesanteur vaut $g = 10\ N.kg^{-1}$

La force de frottement s'exerçant sur la caravane, supposée constante, a pour valeur $f = 200N$.

1- Calculer la valeur de la force de traction F exercée par la voiture sur la caravane.

2- Calculer la puissance P_1 développée par la force de traction.

La voiture et la caravane se déplacent maintenant sur une pente formant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. On gardera la même valeur pour la force de frottement f.

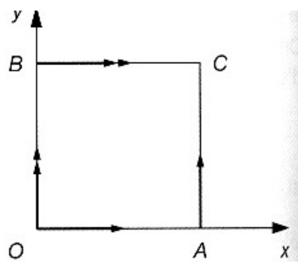
3- Quelle doit être la valeur de la nouvelle puissance P_2 afin que le conducteur garde La même vitesse v ?

1. La force de traction est avec $\vec{f}$ la seule force horizontale : comme la caravane est en MRU, elles se compensent. Donc $F=f=200\,\text{N}$, vers l'avant.
2. $P_1=\vec{F}\cdot\vec{v}=F\,v=4{,}0\,\text{kW}$ car $72\,\text{km/h}=20\,\text{m/s}$
3. La puissance cinétique est encore nulle, car la valeur de la vitesse ne change pas.

   La somme des puissances est donc nulle (TPC) et donc la puissance de la force de traction doit compenser celle de $\vec{f}$, inchangée (toujours opposée au vecteur vitesse) et celle du poids, avec $P_P=\vec{P}\cdot\vec{v}=P\,v=m\,g\,v\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-m\,g\,v\sin\alpha=-54{,}7\,\text{kW}$, qui l'emporte largement sur celle des frottements.

   On obtient donc $P_2=58{,}7\,\text{kW}$

2. Travail d'une force étrange



Les points O, $A(L\,;0)$, $B(0\,;L)$ et C sont les quatre sommets d'un carré.

Il règne dans le plan un champ de force d'équation $\vec{f}=k(y\vec{u}_x-x\vec{u}_y)$, $(k\,\text{cte})$, où x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M où s'applique $\vec{f}$.

a) Évaluer les travaux W_1, W_2 et W_3 de $\vec{f}$ le long des trajets respectifs $O\rightarrow A\rightarrow C$, $O\rightarrow B\rightarrow C$ et $O\rightarrow C$ direct (diagonale du carré).

On exprimera $d\,\vec{OM}$ et $\vec{f}$ sur chacun des segments en fonction des différentielles dx et dy des coordonnées cartésiennes, en simplifiant x et y quand elles ont des valeurs évidentes, puis on calculera à chaque fois l'intégrale correspondant au travail.

b) Conclure sur la force $\vec{f}$ et sur l'énergie potentielle associée à $\vec{f}$.

c) Tracer l'allure la plus précise possible du champ de force $\vec{f}$ le long de chacun des trajets. Retrouver graphiquement le signe du travail dans chaque cas.

$W_{O\to A}(\vec{f})=\int_{O\to A}\alpha(y\vec{u}_x-x\,\vec{u}_y)\cdot(dx\,\vec{u}_x)=\int_{O\to A}\alpha\ y dx=0$ car $y=0$ sur $O\to A$

$W_{A\to C}(\vec{f})=\int_{A\to C}\alpha(y\vec{u}_x-x\,\vec{u}_y)\cdot(dy\,\vec{u}_y)=\int_{O\to A}(-\alpha x)dy=-\alpha L\,[y]_A^B=-\alpha L^2$ car $x=L$ sur $A\to C$

donc $W_1=-\alpha L^2$

$W_{O\to B}(\vec{f})=\int_{O\to B}\alpha(y\vec{u}_x-x\,\vec{u}_y)\cdot(dy\,\vec{u}_y)=\int_{O\to B}(-\alpha x)dy=0$ car $x=0$ sur $O\to B$

$W_{B\to C}(\vec{f})=\int_{B\to C}\alpha(y\vec{u}_x-x\,\vec{u}_y)\cdot(dx\,\vec{u}_x)=\int_{B\to C}\alpha\ y dx=\alpha L\,[x]_B^C=\alpha L^2$ car $y=L$ sur $B\to C$

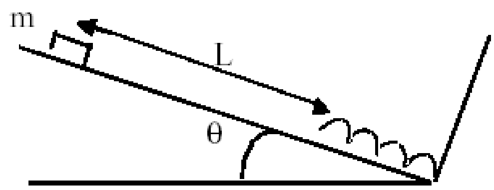
donc $W_2=\alpha L^2$.

Sur O → C direct, on a x=y et dx=dy : on trouve $W_3=W_{O\to C}=0$

On voit que $W_1\neq W_2$: la force $\vec{f}$ n'est pas conservative, on ne peut pas lui associer d'énergie potentielle.

3. Rebond

On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse *m* à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort idéal de constante de raideur *k* en bas du plan incliné. Au point le plus bas atteint par *m*, le ressort est comprimé d'une longueur *d* avant qu'il ne se détende à nouveau.



1. Calculer *k* en fonction de *g*, *m*, θ, L (voir la figure) et *d*.
2. Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?

1. « Sans frottement » : le problème est conservatif => conservation de l'énergie mécanique $E_m=E_c+E_{pp}+E_{pél}$ (toujours commencer par sa définition).

On peut fixer l'origine de l'axe *z* vertical pour l'Epp où l'on veut, mais à une position intéressante pour les calculs : soit état initial, ou bien au bout du ressort libre (le bas du ressort n'est pas judicieux).

EI : donné par l'énoncé

Ec=0 ; Epél=0 (pas de contact) ; $E_{pp}=mgz_I=mgL\sin\theta$, en prenant le 0 au bout du ressort libre.

EF : ressort comprimé au maximum = début du rebond => Ec=0

$E_{pp}=mgz_F=-mgd\sin\theta$, $E_{pél}=\frac{1}{2}kd^2$ car « comprimé d'une longueur d » donc $\Delta L=-d$

La conservation de l'Em donne $k=\sqrt{\frac{2mg(L+d)\sin\theta}{k}}$

2. En prenant comme EI l'état initial de l'énoncé, et non pas l'état final précédent, on trouve immédiatement qu'il n'y a d'Epél ni au début ni à la fin et que $z_F=z_I=mgL\sin\theta$.

4. Carabine à ressort

Une carabine-jouet à ressort est modélisée de la manière suivante : un ressort de raideur k est placé dans un tube cylindrique (en plastique) de longueur ℓ_0 égale à la longueur à vide du ressort. On dépose au bout du ressort une balle en plastique de masse m et on comprime le ressort d'une longueur $\Delta\ell$ à l'intérieur du tube. Le tube étant incliné de 60° par rapport à l'horizontale, on libère le ressort qui propulse instantanément la balle. On néglige le frottement de la balle dans le tube et la résistance de l'air.

1 À quelle vitesse v_0 la balle sort-elle du canon de la carabine ?

2 Quelle hauteur h (par rapport à la sortie de la carabine) la balle atteint-elle dans ces conditions ?
Avec quelle vitesse horizontale v_H ?
A.N. : Calculer v_0, h et v_H.
Données : $m = 20$ g , $k = 400$ N.m^{-1} et $\Delta\ell = 10$ cm.

1. Exercice conservatif, très similaire au précédent : prenons le zéro des altitudes à la sortie de la carabine.

   $E_m=\frac{1}{2}k\,\Delta l^2-m\,g\,\Delta l\sin\alpha=\frac{1}{2}m\,v_0^2$, qui donne $v_0=\sqrt{\frac{k}{m}\Delta l^2-2\,g\,\Delta l\sin\alpha}$

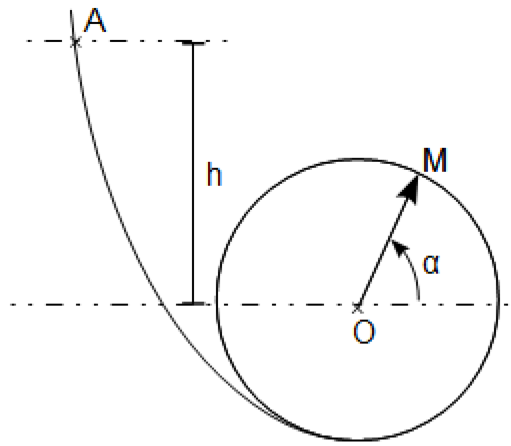
2. On ne peut pas utiliser l'énergie car Ec ne s'annule pas au sommet de la trajectoire : comme le dit l'énoncé, il y a une vitesse horizontale.

   Il faut revenir à Newton : mouvement de chute libre $\vec{a}=\vec{g}$ donc $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}\,t$ puis $\vec{OM}=\vec{v}_0\,t+\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$ en intégrant 2 fois (attention aux constantes liées aux CI).

   On s'intéresse particulièrement à la vitesse $v_z=v_0\sin\alpha-g\,t$ et $v_x=v_0\cos\alpha$, qui est la vitesse horizontale cherchée, car constante, et pour obtenir la flèche h, on remplace la date sachant que la vitesse verticale s'annule :

   $t=\frac{v_0}{g}\sin\alpha$, avec $h=v_0\sin\alpha\,t-\frac{1}{2}g\,t^2$, soit $h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, résultat du cours.

5. Gouttière



Un point matériel M, de masse m, glisse sans frottement dans une gouttière, se terminant par une boucle circulaire de rayon R. Le point matériel est lâché, sans vitesse initiale, depuis un point A, situé à une altitude h au-dessus du centre O du cercle. On repère sa position sur le cercle par l'angle α défini sur la figure ci-dessous. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté $\vec{g}$ et on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude de O.

(a) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du mobile au cours de son mouvement ?

(b) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse de M sur le cercle en fonction de g, h, R et α.

(c) Exprimer la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la gouttière sur M lorsqu'il se trouve sur la portion circulaire, en fonction de g, h, R, m et α.

(d) En déduire la condition sur h et R seulement pour que M puisse faire un tour complet.

(a) Voir le cours.

(b) Il n'y a pas de frottements, donc pas de forces non conservatives : l'énergie mécanique reste constante pendant le mouvement, c'est l'intégrale première de l'énergie.

(c) La référence des altitudes est en O : on a $E_{pp} = mgz$.
L'énergie mécanique vaut donc $E_M = E_{MA} = mgh$ (pas de vitesse initiale).
Dans la phase circulaire, on a $z = a\sin\alpha$ d'où TEM : $mgh = mga\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2$ soit
$v = \sqrt{2g(h - a\sin\alpha)}$

(d) Appliquons le PFD sur M :
<u>Référentiel</u> : terrestre, supposé galiléen.
<u>BdF</u> : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, réaction normale $\vec{R_N} = -R_N\vec{u_r}$ donc $\vec{P} + \vec{R_N} = m\vec{a}$.
Il faut se placer en coordonnées polaires $\{\vec{u_r}, \vec{u_\alpha}\}$ pour déterminer $\vec{R_N}$: $\vec{g}\begin{pmatrix} -g\sin\alpha \\ -g\cos\alpha \end{pmatrix}$ et utilisons l'expression de $\vec{a}$ utilisant la vitesse : $\vec{a}\begin{pmatrix} -v^2/a \\ \dot{v_\alpha} \end{pmatrix}$.
Remplaçons : $-mg\sin\alpha - R_N = -m\frac{v^2}{a}$: $R_N = m\left(\frac{v^2}{a} - g\sin\alpha\right)$ et on remplace v par sa valeur :
$\frac{v^2}{a} = \frac{2g}{a}h - 2g\sin\alpha$ soit $\boxed{R_N = mg\left(\frac{2h}{a} - 3\sin\alpha\right)}$

(e) On doit avoir $R_N \geq 0$ sinon le mouvement n'est plus circulaire : M décroche.
La condition devient donc $\frac{2h}{a} \geq 3\sin\alpha$ soit $h \geq \frac{3a}{2}\sin\alpha$, $\forall\alpha$. $\sin\alpha$ vaut 1 au maximum, en haut de la trajectoire circulaire : il faut donc que $h \geq \frac{3}{2}a$.

6. Descente sportive

La piste de descente olympique La Face de Bellevarde, à Val d'Isère, est longue de 3000 m et présente un dénivelé de 900 m.
Un skieur de masse m = 75 kg descend la piste.

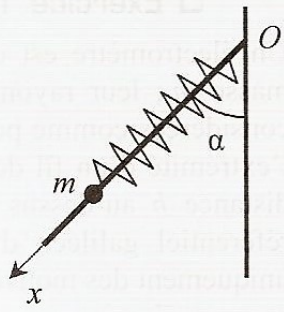
1. En prenant pour origine de l'énergie potentielle la position du skieur à l'arrivée, calculer l'énergie potentielle du skieur au sommet de la piste.
2. Quelle est la valeur de l'énergie mécanique du skieur au départ ?
3. En supposant les frottements négligeables, quelle serait la vitesse du skieur en bas de la piste ?
4. En réalité, la vitesse maximale enregistrée à l'arrivée est de 140 km·h^{-1}.
   Calculer :
   a. l'énergie cinétique du skieur à l'arrivée ;
   b. la variation de l'énergie cinétique du skieur entre le départ et l'arrivée ;
   a. le travail des forces de frottements.

	A	B	C	D	E	F
1	m	75		vFréel	140	km/h
2	Δh	900			38,88888889	m/s
3	L	3000				
4	g	9,8				
5						
6	Epl	661500		EcF	56712,96296	
7	vSansF	132,8156617	m/s	'=Δec		
8		478,1363822	km/h			
9				Wfrot	-604787,037	

7.

Ressort sur tige inclinée

Considérons une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige, avec l'origine O est prise à l'autre extrémité du ressort.



1. Énergie et équilibre

a) Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m. .

b) En déduire la position d'équilibre stable $x_{éq}$.

c) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $u = x - x_{éq}$.

2. Oscillations

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

b) En déduire la période des petites oscillations.

1. a. $E_p = m g z + \frac{1}{2} k (L - L_0)^2$ qu'il faut traduire : $L = x$ et $z = -x \cos\alpha$ (axe z vers le haut).

$E_p(x) = -m g x \cos\alpha + \frac{1}{2} k (x - L_0)^2$

1.b. $E_p'(x) = -m g \cos\alpha + k(x - L_0)$ qui s'annule en $x_{éq} = L_0 + \frac{m}{k} g \cos\alpha$

1.c. $x = u + x_{éq} = u + L_0 + \frac{m}{k} g \cos\alpha$: $E_p = -m g u \cos\alpha - m g L_0 \cos\alpha - \frac{m^2}{k} g^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} k \left(u + \frac{m}{k} g \cos\alpha\right)^2$ soit

$$E_p=\frac{1}{2}ku^2-mgL_0\cos\alpha-\frac{m^2}{2k}g^2\cos^2\alpha$$

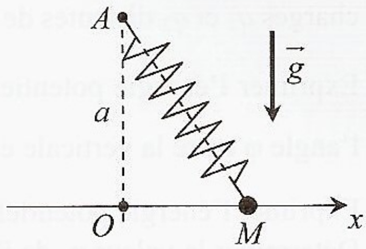
2. a. $E_p'(x)=-mg\cos\alpha+k(x-L_0)=-F_x(x)$, avec $m\ddot{x}=F_x(x)$: $m\ddot{x}+kx=mg\cos\alpha+kL_0=kx_{\text{éq}}$

2. b. $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ donc $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$:l'angle α ne change rien au comportement usuel.

8.

Oscillation le long d'une tige

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (longueur à vide ℓ_0, raideur k) dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est $AO = a$.



1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$. En déduire que, dans le cas où $a > \ell_0$, la seule position d'équilibre est O et qu'elle est stable.

2. On étudie alors les oscillations autour de O. Écrire l'équation différentielle du mouvement par dérivation de l'énergie mécanique. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x (c'est-à-dire en négligeant les termes en x^2, x^3...), en déduire la période des petites oscillations.

1. Pas d'Epp ici : $E_p=\frac{1}{2}k(L-L_0)^2$, donc en fonction de x (Pythagore) : $E_p=\frac{1}{2}k(\sqrt{a^2+x^2}-L_0)^2$

$E_p'(x)=k(\sqrt{a^2+x^2}-L_0)\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}2x$, ne s'annule qu'en $x=0$ car $\sqrt{a^2+x^2}\geq\sqrt{a^2}>L_0, \forall x$.

Son signe est celui de x : négatif puis positif, donc Ep est décroissante puis croissante : min local, x=0 est une position d'équilibre stable.

2. En négligeant les termes en x², inférieurs à a², on a

$E_p'(x)=k(a-L_0)\frac{1}{a}x=k\left(1-\frac{L_0}{a}\right)x=-F_x(x)$: $m\ddot{x}=F_x(x)$, donc $m\ddot{x}+k\left(1-\frac{L_0}{a}\right)x=0$, donc

$\omega_0^2=\frac{k}{m}\left(1-\frac{L_0}{a}\right)$ et $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$: le système oscille plus lentement que le système masse-ressort usuel.

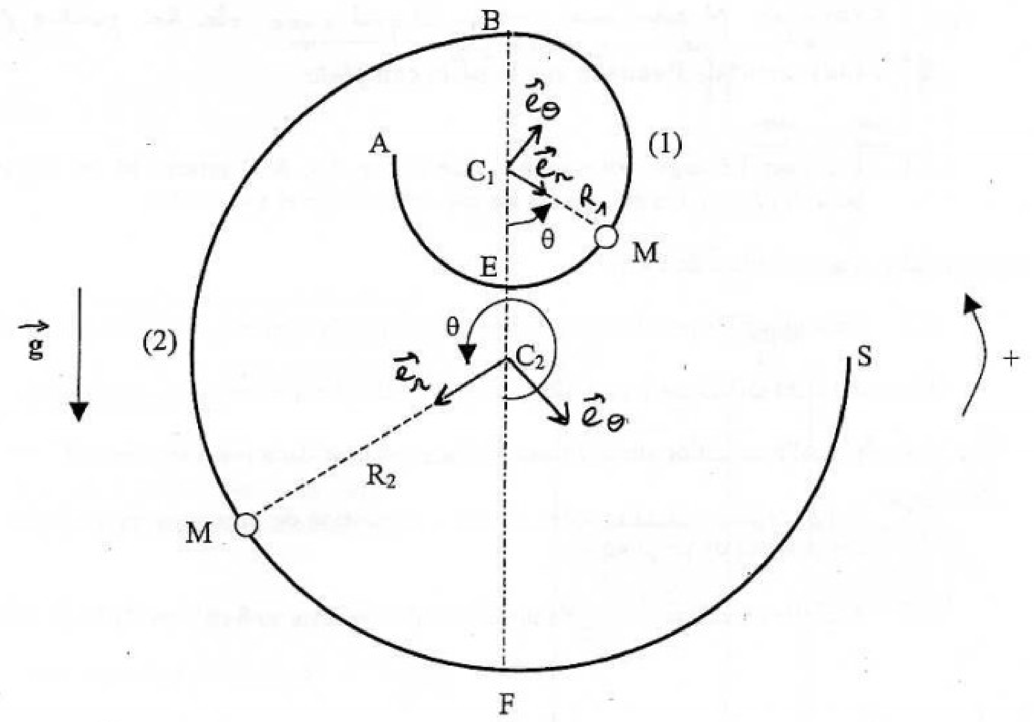
9. Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

On considère le dispositif de la figure ci-dessous, où un anneau assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste formée de deux parties circulaires (1) et (2) de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, de centres C_1 et C_2, dans un plan vertical.

On repère la position de l'anneau par l'angle θ pris à partir de C_1 pour son mouvement sur la partie (1), et à partir de C_2 pour son mouvement sur la partie (2).

Sur la partie (1), θ varie entre $-\pi/2$ et π. Sur la partie (2), θ varie entre π et $5\pi/2$.

On note g la constante de gravitation terrestre.



Dans tout le problème, on suppose que le mouvement de l'anneau s'effectue sans frottements.

Dans un premier temps, le mouvement de l'anneau a lieu sur la partie (1) du dispositif. À l'instant $t=0$, l'anneau se trouve au point $E(\theta=0)$, avec une vitesse angulaire initiale positive $(d\theta/dt)_0$.

Remarque : on pourra utiliser la notation « point » pour la dérivée temporelle.

A/ Mouvement de l'anneau sur la partie (1)

On se limite ici à la partie (1) de la piste.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p, de l'anneau M en fixant $E_p=0$ au point $B(\theta=\pi)$.
2. En déduire le carré de la vitesse angulaire $(d\theta/dt)^2$ à une position quelconque en fonction des données du problème R_1, $(d\theta/dt)_0$, g et θ.
3. En déduire l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.

On admet pour les deux questions qui suivent (4 et 5, mais pas 6) l'hypothèse que θ est suffisamment petit pour assimiler $\sin\theta$ à θ

4. Déterminer l'expression complètement déterminée de $\theta(t)$. Déterminer la valeur maximale de $\theta(t)$: θ_{max}.
5. Application numérique : $R_1=1\,cm$, $g=10\,m/s^2$ et $(d\theta/dt)_0=1\,rad/s$.

Calculer la pulsation, la période et l'amplitude maximale (θ_{max}) du mouvement. L'approximation $\sin\theta = \theta$ est-elle valable ?

6. On note $\overline{N} = N_r$, coordonnée radiale (projection sur $\vec{e}_r$) de la réaction $\vec{N}$ de la piste sur l'anneau.
   a) Pourquoi est-ce la seule coordonnée de $\vec{N}$?
   b) Exprimer $\overline{N}$ pour une position quelconque de l'anneau sur la partie (1) de la piste, en fonction de m, R_1, $(d\theta/dt)_0$, g et θ.
   c) Étant donné le système considéré (anneau sur piste filiforme), le signe de $\overline{N}$ est-il imposé ou peut-elle éventuellement changer de signe ?

B/ Mouvement de l'anneau sur la piste complète (1)+(2)

1. Avec le même choix du zéro qu'à la question A/1., exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p, de l'anneau M sur la partie (2).

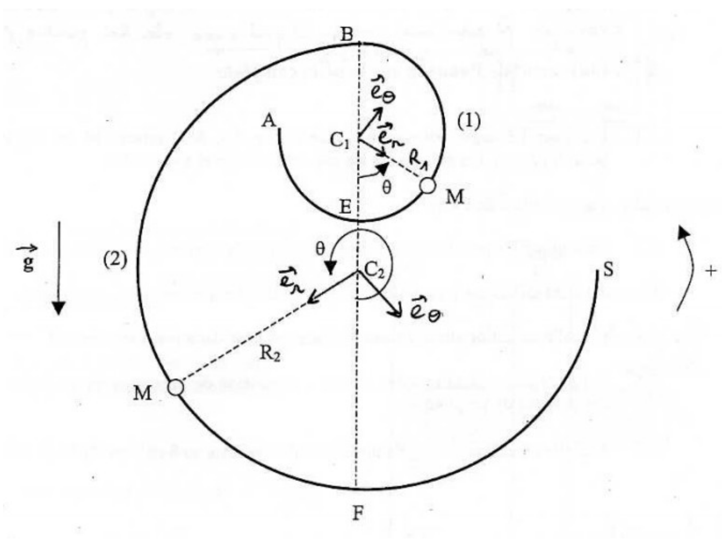
   Tracer l'allure de $E_p(\theta)$ dans tout le domaine $[-\pi/2 \ ; 5\pi/2]$.
2. Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau en précisant leur stabilité.

L'anneau étant initialement en $A(\theta=-\pi/2)$, il est lancé à une vitesse v_0 sur la piste.

3. À quelle condition sur la vitesse v_0 l'anneau peut-il atteindre le point F ?
4. Cette condition étant tout juste remplie, donner l'expression de sa vitesse v_F au point $F(\theta=2\pi)$ en fonction des données du problème.
5. À quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en $S(\theta=5\pi/2)$?

A/ 1. Notons H le projeté orthogonal de M sur l'axe vertical : on a $-z = BH = R_1 + R_1\cos\theta$ donc $E_p = -mgR_1(1+\cos\theta)$ qui s'annule bien en $B(\theta=\pi)$.

2. Le carré de la vitesse angulaire est lié à la valeur de la vitesse, puis $\overrightarrow{C_1M} = R_1\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R_1\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\overline{v} = R_1\dot{\theta}$: $v^2 = R_1^2(\dot{\theta})^2$



Problème conservatif :

$$E_m = \frac{1}{2}mR_1^2(\dot{\theta}_0)^2 - mgR_1(1+\cos 0) = \frac{1}{2}mR_1^2(\dot{\theta})^2 - mgR_1(1+\cos\theta)$$, soit

$$R_1(\dot{\theta}_0)^2 - 2g(1+1) = R_1(\dot{\theta})^2 - 2g(1+\cos\theta)$$ donc $$(\dot{\theta})^2 = (\dot{\theta}_0)^2 - 2\frac{g}{R_1}(1-\cos\theta)$$

3. … qu'on dérive par rapport au temps pour obtenir l'équation différentielle : $2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -2\frac{g}{R_1}(\dot{\theta}\sin\theta)$. Donc $\dot{\theta}=0$ ou bien $\ddot{\theta} + \frac{g}{R_1}\sin\theta = 0$: même équation que le pendule simple sans frottements (problème similaire).

4. L'équation devient harmonique pour les petits angles : $\ddot{\theta}+\Omega_0^2\theta=0$ avec $\Omega_0=\sqrt{\frac{g}{R_1}}$, et sa solution générale est (éq homogène) : $\theta(t)=A\cos(\Omega_0 t)+B\sin(\Omega_0 t)$

Or $\theta(0)=0$ donc $A=0$ et $\mathring{\theta}_0=-A\,\Omega_0\sin(\Omega_0 0)+B\,\Omega_0\cos(\Omega_0 0)$ donc $\mathring{\theta}_0=B\,\Omega_0$: $\theta(t)=\frac{\mathring{\theta}_0}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t)$ et $\theta_{\max}=\frac{\mathring{\theta}_0}{\Omega_0}=\mathring{\theta}_0\sqrt{\frac{R_1}{g}}$

5. $R_1=10^{-2}\mathrm{m}$, donc $\Omega_0=31{,}6\ \mathrm{rad/s}$, $T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0}=0{,}20\ \mathrm{s}$ et $\theta_{\max}=0{,}0316\ \mathrm{rad}=1{,}81\ °$ qui est sans aucun doute un petit angle... ($\sin\theta=\theta$ jusqu'au troisième chiffre).

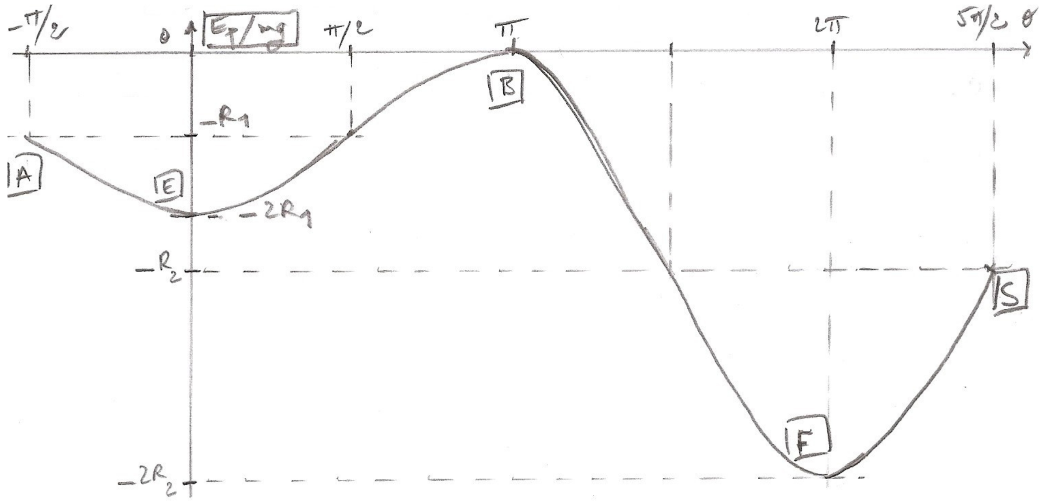
6.a) La piste est circulaire : $\vec{e}_r$ est donc perpendiculaire à la piste, et $\vec{N}$ aussi puisqu'il n'y a pas de frottements.

b) On dérive une deuxième fois le vecteur position : $\vec{v}=R_1\mathring{\theta}\,\vec{e}_\theta\Rightarrow\vec{a}=-R_1(\mathring{\theta})^2\vec{e}_r+R_1\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et la RFD projetée sur $\vec{e}_r$ donne $m\,a_r=\bar{N}+P_r$: $-m\,R_1(\mathring{\theta})^2=\bar{N}+m\,g\cos\theta$ où l'on utilise le résultat de la question A/2. : $\bar{N}=-m\,g\cos\theta-m\,R_1(\mathring{\theta})^2=-m\,g\cos\theta-m\,R_1(\mathring{\theta}_0)^2+2\,m\,g(1-\cos\theta)$ donc $\bar{N}=-m[R_1(\mathring{\theta}_0)^2+g(3\cos\theta-2)]$: si la vitesse initiale est nulle, M reste en 0 et on retrouve bien $\bar{N}=-m\,g$

c) Si c'est un anneau, il est enfilé sur la piste : $\bar{N}$ peut changer de signe ; si $\vec{N}$ est dans le sens de $\vec{e}_r$, donc vers l'extérieur, la piste retient l'anneau en l'empêchant de tomber en chute libre à l'intérieur du virage.

B/1. Pour le grand cercle, le point B correspond encore à son sommet : c'est la même situation, et l'angle est le même aussi, avec un tour (2π) en plus, ce qui ne change pas ses lignes trigonométriques, donc $E_p=-m\,g\,R_2(1+\cos\theta)$.

2. cos varie entre -1 et +1 : il y a donc un min local (équilibre stable) en 0, de valeur $E_p=-2m\,g\,R_1$, un max (équilibre instable) en π de valeur nulle et un autre min plus bas en 2π (équilibre stable) de valeur $E_p=-2m\,g\,R_1$.



3. Comme il part du point A, il doit pouvoir franchir la barrière de potentiel : en traçant des droites horizontales correspondant aux valeurs de l'énergie mécanique, on voit qu'il faut que son énergie mécanique soit strictement positive (supérieure à la valeur max de E_p).

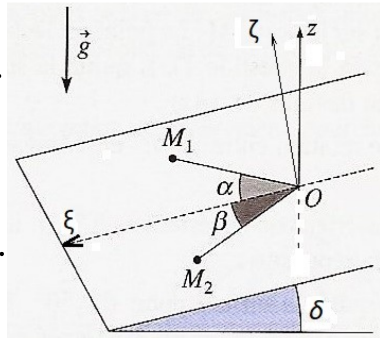
Donc $E_m=\frac{1}{2}m\,V_0^2-m\,g\,R_1(1+0)>0$ donc $V_0>\sqrt{2\,g\,R_1}$

4. On a alors $E_m = 0 = \frac{1}{2} m V_F^2 - m g R_2 (1 + \cos 2\pi)$: $V_F = 2\sqrt{g R_2}$

5. Comme il a dû franchir le point B pour arriver en F, son énergie mécanique est positive.

Comme l'altitude de S est négative, il sortira de la piste de toute façon, avec une énergie cinétique au moins égale à $-E_p(S) = m g R_2$

10. Plan incliné (décomposition 3D)



On considère un plan incliné d'un angle δ par rapport à l'horizontale.

L'axe vertical est noté *z*, alors que l'axe perpendiculaire au plan incliné est noté ζ.

La ligne de plus grande pente du plan incliné est notée ξ : il s'agit de la demi-droite de référence des coordonnées polaires du mouvement.

En effet, le point *M* est accroché à un fil toujours tendu, de longueur *L* fixé en *O*.

Le point *M* est lâché de la position initiale $\theta = -\alpha$, sans vitesse, et atteint la position $\theta = +\beta$ avant de repartir en arrière.

On a $\beta < \alpha$, car il existe des frottements solides de coefficient dynamique *f*. On néglige tout frottement fluide.

a) Écrire la RFD, représenter la base cylindropolaire utile pour l'étude du mouvement, en un point *M* **quelconque** de la trajectoire, et déterminer les coordonnées du vecteur accélération dans cette base, en fonction de *L* et des dérivées temporelles de θ.

b) Déterminer les coordonnées des forces dans cette base, en fonction de leur norme.

   Dans le cas du poids, décomposer $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_\xi ; \vec{u}_\zeta)$ d'abord, puis décomposer à nouveau si besoin dans la base polaire.

c) En déduire une expression reliant θ, ses dérivées, et des constantes.

d) Intégrer cette expression entre l'état initial et l'état final, pour obtenir l'expression du coefficient de frottement en fonction de seulement δ, α et β.

a) Le mouvement est circulaire sur le plan incliné, avec évidemment $r = OM = L$, et l'angle polaire est $\theta = (O\xi, \vec{OM})$.

   La base cylindrique est donc $(\vec{u}_r ; \vec{u}_\theta ; \vec{u}_\zeta)$: le 3ème axe, cartésien, est perpendiculaire au plan polaire.

   On obtient très facilement (le démontrer) : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T}$

   On dérive deux fois $\vec{OM}$ pour trouver le vecteur accélération : $\vec{a} = -L(\dot{\theta})^2 \vec{u}_r + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ (le démontrer également).

b) La réaction normale est par définition perpendiculaire au plan incliné, sa direction est donc celle de l'axe ζ, du plan vers M, donc $\vec{R}_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +R_N \end{pmatrix}$.

   La réaction tangentielle vérifie la loi de Coulomb dynamique et est opposée à la vitesse, portée par $\vec{u}_\theta$ (MC), donc $\vec{R}_T \begin{pmatrix} 0 \\ -f R_N \\ 0 \end{pmatrix}$.

La tension du fil est opposée à $\vec{u}_r$, de norme inconnue : $\vec{T}\begin{pmatrix}-T\\0\\0\end{pmatrix}$

Dans le cas du poids, c'est bien plus difficile : il est dans le plan vertical, qui contient les axes ζ et ξ, car il est colinéaire à z.

L'angle entre $\vec{P}$ et $\vec{u}_\zeta$ est clairement $\frac{\pi}{2}+\delta+\frac{\pi}{2}$: faire un schéma en coupe en plaçant l'angle δ avec O comme origine ; l'angle entre $\vec{u}_\xi$ et $\vec{P}$ est $\pi-\delta-\frac{\pi}{2}$.

On a donc $\vec{P}=-P\cos\delta\,\vec{u}_\zeta+P\sin\delta\,\vec{u}_\xi$.

Il faut maintenant décomposer $\vec{u}_\xi$ sur la base polaire : $(\vec{u}_\xi;\vec{u}_r)=\theta$ et $(\vec{u}_\xi;\vec{u}_\theta)=\frac{\pi}{2}+\theta$, donc $\vec{u}_\xi=\cos\theta\,\vec{u}_r-\sin\theta\,\vec{u}_\theta$.

En remplaçant, on trouve toutes les coordonnées du poids : $\vec{P}\begin{pmatrix}+P\sin\delta\cos\theta\\-P\sin\delta\sin\theta\\-P\cos\delta\end{pmatrix}$.

On peut vérifier qu'on retrouve la norme de *P* avec Pythagore 3D (et les signes des coordonnées : $\vec{u}_r$ est toujours en gros vers le bas, alors que $\vec{u}_\theta$ est plutôt vers le haut pour $\theta>0$.

c) D'où le système : $\begin{cases}-mL(\dot{\theta})^2=P\sin\delta\cos\theta-T\\ mL\ddot{\theta}=-P\sin\delta\sin\theta-f\,R_N\\ 0=-P\cos\delta+R_N\end{cases}$.

Aucun espoir avec la première équation qui ne donnera que *T* après calcul, mais la combinaison des deux autres donne $L\ddot{\theta}=-g\sin\delta\sin\theta-f\,g\cos\delta$

d) La fonction $\sin\theta(t)$ n'admet pas de primitive : il faudrait que ce soit multiplié par $\dot{\theta}$: on le fait sur toute l'équation, soit $L\ddot{\theta}\dot{\theta}=-g\sin\delta\,\dot{\theta}\sin\theta-f\,g\cos\delta\,\dot{\theta}$, et les primitives sont faciles pour tous les termes.

$[\frac{1}{2}L(\dot{\theta})^2]_0^t=g\sin\delta[\cos\theta]_0^t-f\,g\cos\delta[\theta]_0^t$, où *t* est la date en M_2.

Quand $\theta=-\alpha$ ou quand $\theta=+\beta$, la vitesse angulaire s'annule, donc $0=g\sin\delta[\cos\beta-\cos(-\alpha)]-f\,g\cos\delta[\beta-(-\alpha)]$ et finalement $\boxed{f=\tan\delta\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\beta+\alpha}}$