Problème à deux corps (et demi)

Dans le cours, nous avons étudié les orbites d'un système autour d'un astre central fixe unique.

En astronomie, cette situation est fréquente, mais n'est pas la seule : beaucoup d'étoiles sont dites doubles, car elles orbitent l'une autour de l'autre, en tournant autour de leur **centre de gravité G**.

On considère ici deux corps célestes (étoiles doubles ou planète avec un satellite), de centres notés P_1 et P_2, et de masses respectives m_1 et m_2.

La masse totale est notée $m_T = m_1 + m_2$ et le rapport des masses est noté $k = \frac{m_1}{m_2} \geq 1$: on peut supposer que le corps n°1 est le plus massif.

On prendra leur centre de gravité G comme origine du repère polaire : on note $R_1 = GP_1$ (distance), $R_2 = GP_2$ et $D = P_1P_2 = R_1 + R_2$.

Dans tout le problème, la distance D est supposée **constante** : chacun des astres tourne autour de G en décrivant une orbite circulaire (ce n'est pas le cas général en astronomie : on peut obtenir deux ellipses).

Partie A : problème à 2 corps ...

1. Obtenir l'expression de chacune des masses des astres en fonction de m_T et de k.
2. Rappeler la définition du centre de gravité (barycentre), et en déduire chaque distance R_1, R_2 en fonction de D et k. Schématiser pour $k = 2$.
3. En appliquant une loi sur chacun des astres, montrer que la vitesse angulaire commune vérifie $\omega^2 = \frac{G m_T}{D^3}$.

Partie B : ... et à 2 corps et demi

On s'intéresse à un système M de masse m, négligeable devant m_1 et m_2 : son effet gravitationnel sur les astres est négligeable.

M peut se trouver n'importe où dans l'espace, pas nécessairement sur la droite (P_1P_2).

On note alors les distances $r_1 = MP_1$, $r_2 = MP_2$ et $r = MG$, et les forces gravitationnelles exercées sur M par $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux positions d'équilibre de M dans le système $(P_1; P_2)$: le mouvement de M est donc « le même » que celui des astres, les distances r, r_1, r_2 restent toujours constantes.

1. Quelle est nécessairement la nature du mouvement de M ? dans quel plan ?
2. En déduire que le vecteur $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ est nécessairement colinéaire au vecteur $\vec{MG}$.
3. Expliquer pourquoi on peut écrire chaque force gravitationnelle sur M par $\vec{F}_i = G m m_i \frac{\vec{MP_i}}{r_i^3}$.
4. En transformant la définition du barycentre pour faire intervenir les vecteurs $\vec{MP_i}$ et $\vec{MG}$, prouver que si M n'est pas sur la droite (P_1P_2), alors, pour vérifier B.2., il faut et il suffit que $r_1 = r_2$. Quel est le lieu des points du plan qui vérifient cette équation ?
5. Avec une seconde propriété obligatoire du mouvement de M, démontrer que $r_1 = r_2 = D$. Conclure : rédiger où se situent exactement les positions d'équilibre de M qui ne sont pas sur (P_1P_2).