

À lire avec soin avant de commencer :

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis.

On demande d'encadrer les résultats littéraux et de souligner les résultats numériques pour les mettre en évidence. De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie. Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision. La mauvaise foi sera sévèrement sanctionnée.

La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

I – SYSTÈME MASSE-RESSORT AVEC FROTTEMENTS SOLIDES (4 PTS)

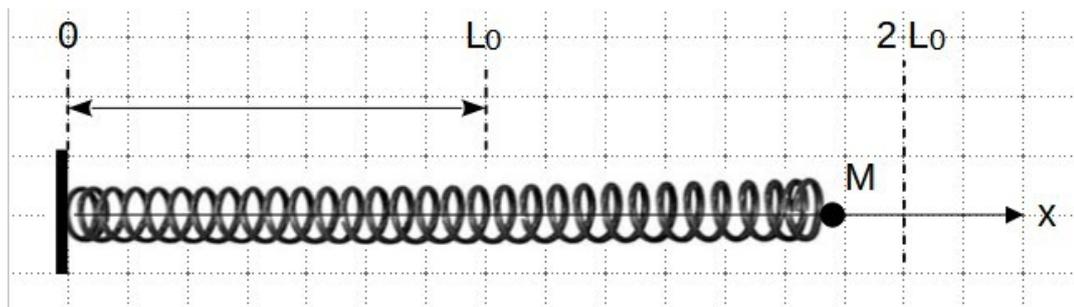
On considère un point matériel M de masse m , accroché à un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide L_0 . Le mouvement est horizontal sur une tige selon l'axe (Ox) , dont l'origine est prise à l'autre extrémité fixe du ressort, et il existe des frottements solides de coefficients statique et dynamique égaux entre le point et le support (tige) $f = f_s = f_D$.

On néglige tout frottement fluide.

M est lâché avec les conditions suivantes : $L(0) = x(0) = 2L_0$, où L est la longueur du ressort, et $\dot{x}(0) = \bar{v}(0) = 0$.

Les frottements sont faibles : le système oscille, et on admet que, pendant toutes les oscillations, il y a **glissement**, même si la vitesse v s'annule à certaines dates. La norme du champ de pesanteur est notée g .

1. Sur la **figure 1** suivante, reproduite sur l'**annexe à rendre avec la copie**, on a représenté l'état du dispositif un peu après le début du mouvement.



Pendant l'étude dynamique, schématiser sur la figure 1 toutes les forces sur M , puis démontrer que l'abscisse x de M vérifie l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (L_0 \pm D)$$

le signe devant D (grandeur positive) dépendant du sens du mouvement. On précisera ce signe, et on donnera les valeurs de D et de ω_0 en fonction de m, k, g et f .

2. Voir la **figure 2** de l'annexe : démontrer les valeurs **encadrées**, et déterminer les valeurs **soulignées**. Il est vivement conseillé, lors de la résolution de l'équation dans la deuxième partie du mouvement (courbe croissante), de remettre la date à 0, donc de prendre la condition initiale $x(0) = 2D$.
3. M va s'arrêter au bout d'un certain temps... La courbe présentera alors une tangente horizontale, en un point de coordonnées $(Nt_1; x_{\text{arret}})$, où N est le nombre total de demi oscillations effectuées.

En supposant que ce soit lors d'un mouvement vers les x négatifs, comparer alors x_{arret} à L_0 . On justifiera la réponse par le sens des forces exercées sur M .

II – ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU PENDULE SIMPLE SANS FROTTEMENTS (5¹/₄ PTS)

Attention : Dans tout le problème, on suppose que le mouvement du système reste dans un plan vertical.

Le pendule simple, de longueur R , est accroché en O , point fixe, et origine des coordonnées.

Le système d'étude, point matériel M de masse m , est relié à O , ou bien :

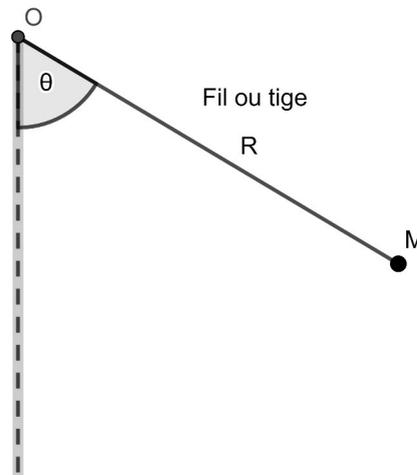
- par un fil inextensible de longueur R ; ou bien
- par une tige solide de masse négligeable devant m , de longueur R .

On repère le mouvement de M par l'angle θ défini à partir de la verticale, orienté positivement dans le sens trigonométrique ; cf schéma ci-contre.

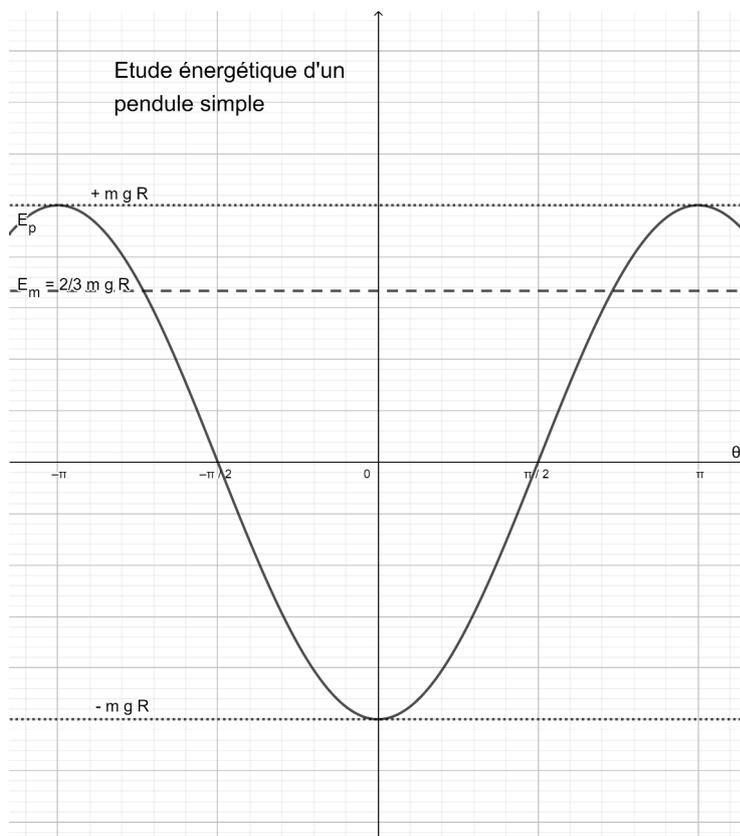
Le champ de pesanteur est uniforme de norme $g=9,8\text{ m/s}^2$, et la Terre est supposée un référentiel parfaitement galiléen.

Tous les frottements sont négligés.

On note la pulsation des petites oscillations $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.



1. On peut noter la réaction du fil ou de la tige sur M par $\vec{T} = -\bar{T} \vec{u}_{O \rightarrow M}$, où \bar{T} est a priori algébrique. Qu'est-ce qui diffère pour \bar{T} selon que le pendule est constitué avec un fil ou avec une tige ?
2. Démontrer, en obtenant son expression, que la courbe en trait plein de la **figure 3** ci-dessous, et reproduite sur l'**annexe à rendre avec la copie**, représentant l'énergie potentielle de M en fonction de θ , $E_p(\theta)$, est correcte.



3. Obtenir l'expression générale du vecteur vitesse \vec{v} de M en fonction de R , de l'angle θ et/ou de ses dérivées temporelles, et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.
4. On suppose dans toute cette question, comme indiqué sur la figure 3 ci-dessus, que l'énergie mécanique de M vaut $E_m = +\frac{2}{3}mgR$.
 - a) Compléter la **figure 3** de l'**annexe** : rayer avec des croix (« X ») la zone interdite du mouvement de M , c'est-à-dire les abscisses angulaires θ que M ne peut pas atteindre.
 - b) Justifier théoriquement la réponse précédente.
 - c) Calculer en degrés les angles minimal et maximal, θ_m et θ_M , que M atteint. On attend ici un résultat exact, et non une lecture graphique.
 - d) Cette valeur d'énergie mécanique a été donnée avec les conditions initiales suivantes : le pendule a été lancé de sa position d'équilibre stable, avec une vitesse angulaire positive ω_0 .
En déduire ω_0 en fonction de Ω .
5. Décrire le mouvement du pendule lorsque son énergie mécanique est strictement supérieure à $+mgR$.
6. Par dérivation temporelle de l'expression générale de l'énergie mécanique (théorème de la puissance mécanique), retrouver que $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ est bien la pulsation des petites oscillations.
7. Après avoir obtenu \bar{T} en fonction des constantes, de l'angle θ et de sa dérivée temporelle première, démontrer que :

$$\frac{1}{2}R\bar{T}(\theta) = E_m - \frac{3}{2}E_p(\theta)$$

8. On suppose maintenant que le pendule simple est constitué avec un fil.
 - a) Déduire du résultat précédent le (ou les) intervalle(s) où les valeurs de E_m doivent se trouver pour que le fil reste toujours tendu lors du mouvement du pendule.
 - b) Traduire cette même condition en terme de vitesse angulaire initiale ω_0 en fonction de Ω , le pendule étant toujours lancé de sa position d'équilibre stable.

III – LE SOLEIL A RENDEZ-VOUS AVEC LA PLUIE (CCINP 2023 MP-MPI) (7¹/₄ PTS)

On rappelle l'expression du volume V d'une boule de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Partie I - Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Q1.** Définir " référentiel galiléen ". Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.
- Q2.** On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{frott} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e}_z \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

- Q3.** En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_{lim} = K\sqrt{D} \overrightarrow{e}_z$$

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la **figure 1** en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

- Q4.** Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de **Q1** à **Q3** n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

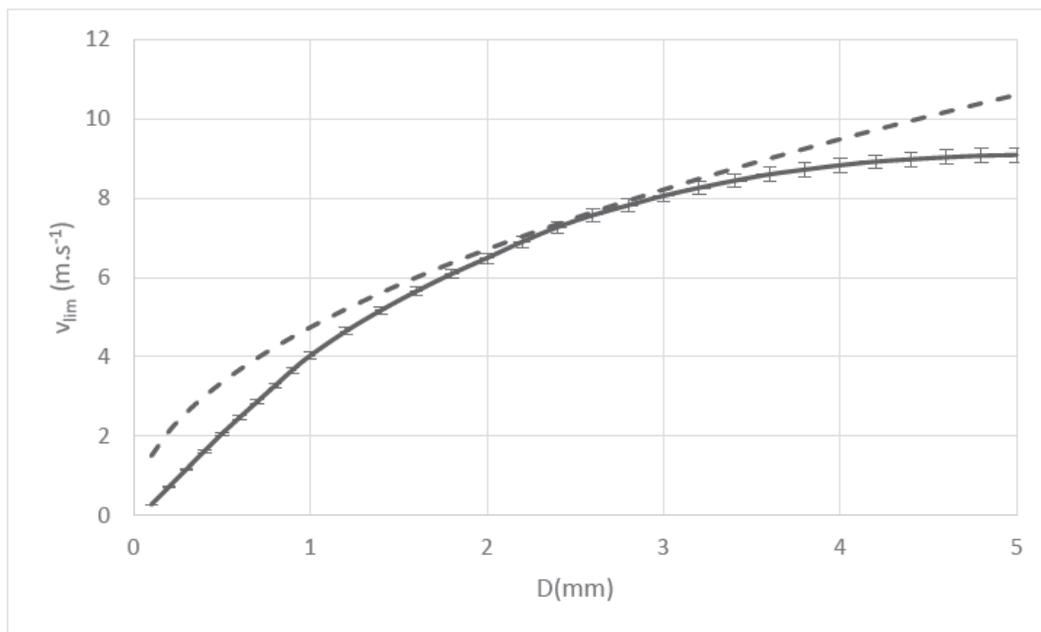


Figure 1 - Influence du diamètre sur la vitesse limite

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter").

Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (**photo 1**).

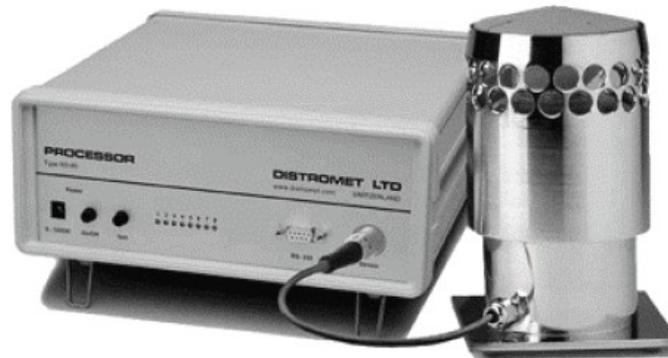


Photo 1 - Disdromètre Joss-Waltvogel

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, l_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{\text{platine}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

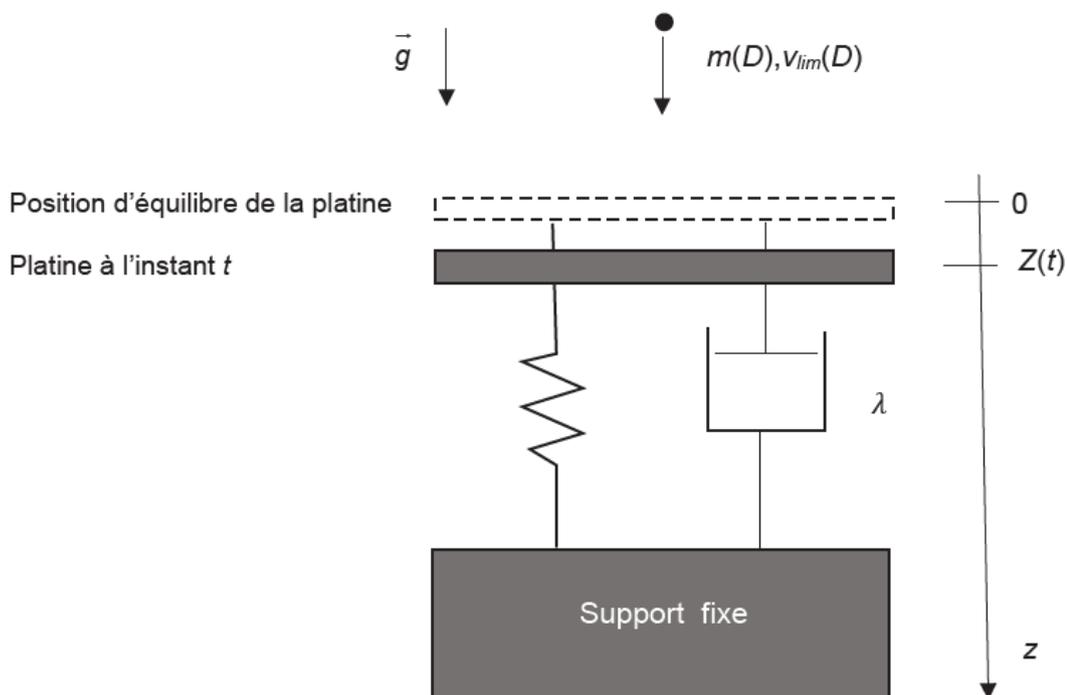


Figure 2 - Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur $l_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k , M et de λ .

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$;
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2,5 \text{ mm}$.

Q8. On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2} \right) e^{-\gamma t/2} \right].$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à

D^α et donner la valeur de α .

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

IV – PROTON DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE CONSTANT UNIFORME (4¹/₄ PTS)

La vitesse initiale du proton est $\vec{v}_0 = +v_0 \vec{e}_x$, à l'origine O des coordonnées. Il règne dans tout l'espace, auquel on associe un repère cartésien direct $Oxyz$, un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = +B \vec{e}_z$.

Il n'y a aucun champ électrique dans le problème.

1. Avec l'approximation usuelle faite dans le cadre de la physique des particules, obtenir les équations différentielles couplées vérifiées par les coordonnées sur x et sur y du vecteur vitesse \vec{v} du proton, en fonction de sa masse m , de la charge fondamentale e , et de la norme du champ magnétique.

On rappelle qu'on déduit de ces équations le mouvement du proton : c'est un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$.

2. Schématiser sur la copie les axes du plan (Oxy), plan de la figure, et placer le symbole correspondant à l'axe (Oz).
3. En étudiant le sens de la force subie par le proton à $t=0$, force qu'on représentera sur la figure précédente, dessiner l'allure de la trajectoire du proton.

En réalité, ce n'est pas tout-à-fait exact, car toute charge libre (ce n'est pas le cas de l'électron dans l'atome), qui a un mouvement avec un vecteur accélération non nul, rayonne : son énergie totale diminue avec le temps.

On modélise ce rayonnement par une force supplémentaire, force de frottement fluide laminaire $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

4. Modifier le système précédent des équations couplées en conséquence.

On définit la grandeur complexe associée à la vitesse $\underline{v} = v_x + j v_y$, et de même, le complexe associé à la position $\underline{x} = x + j y$.

5. Montrer que \underline{v} vérifie l'équation différentielle suivante $\frac{d\underline{v}}{dt} + (\lambda + j \omega) \underline{v} = 0$, où l'on donnera les expressions de λ et de ω , en fonction de m, e, α, B .

On pourra noter $\frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}}$.

6. a) Résoudre cette équation grâce aux conditions initiales, et en cherchant une solution de forme exponentielle.
b) En déduire les expressions complètement déterminées des grandeurs réelles $v_x(t)$ et $v_y(t)$.
7. a) Obtenir par intégration du complexe $\underline{v}(t)$, obtenu à la question 6.a., l'expression déterminée du complexe $\underline{x}(t)$.
b) En déduire les coordonnées (x_∞, y_∞) de la position finale du proton, d'abord en fonction de v_0, ω et λ , puis en fonction de R et de $k = \frac{\lambda}{\omega}$.

FIN

Annexe à rendre avec la copie

NOM :

PARTIE I

Figure 1

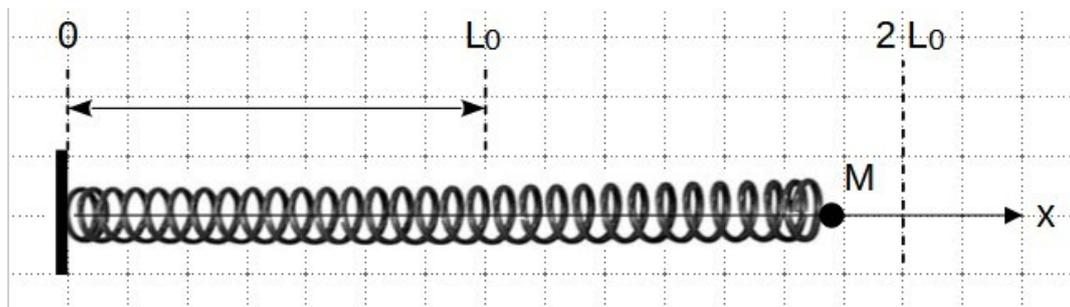
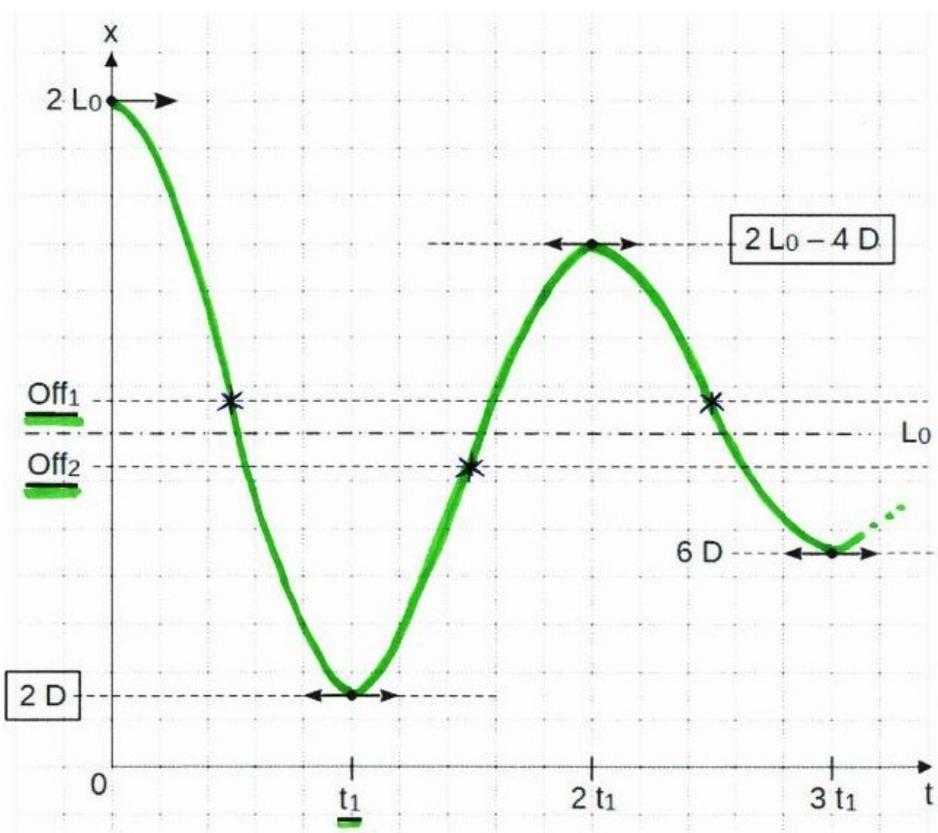


Figure 2



Partie II

Figure 3

