

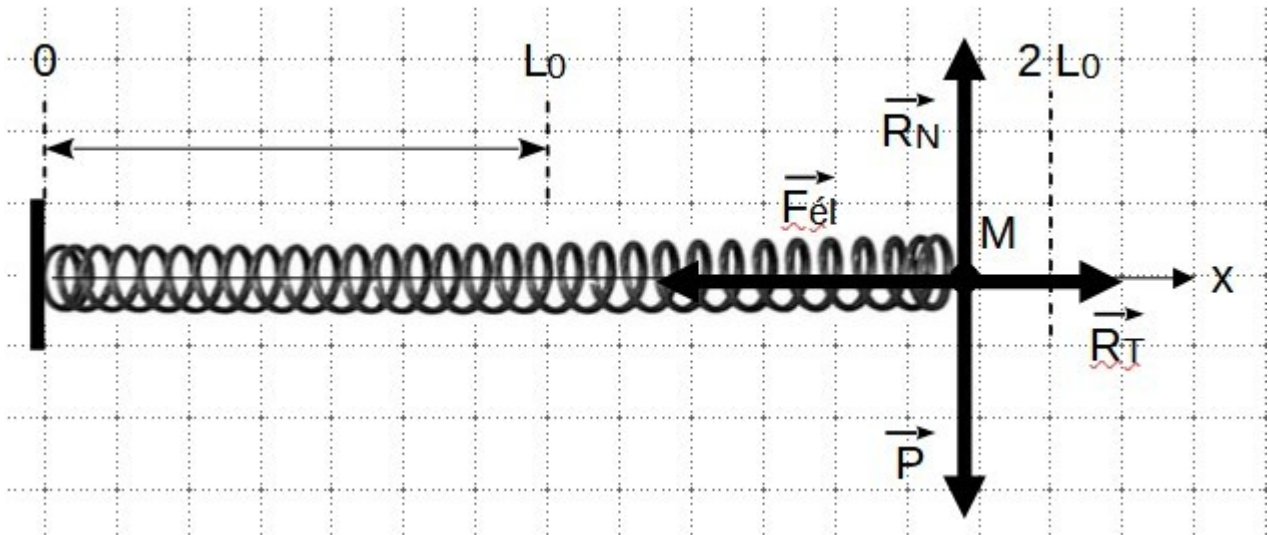
Correction DS n°4 physique PCSI2

SYSTÈME MASSE-RESSORT ET FROTTEMENTS SOLIDES

1. Référentiel : Terre, galiléenne Système : M, de masse m

Contrainte : mouvement selon (Ox) => pas d'accélération selon y

BdF : Poids $\vec{P}=m\vec{g}$ Force de rappel $\vec{F}_{el}=-k(L-L_0)\vec{u}$ Réaction du support $\vec{R}=\vec{R}_N+\vec{R}_T$



Au début du mouvement, vers les x négatifs, \vec{R}_T est opposé au mouvement, donc selon $+\vec{u}_x$.

Pour rester général, on pose $\vec{R}_T=\bar{R}_T\vec{u}_x$, où \bar{R}_T est algébrique, positive dans la première phase du mouvement, négative lorsque x sera croissante.

Le ressort est au début plus long que L_0 , donc la force de rappel élastique est donc dirigée de M vers O.

Les composantes de la réaction vérifient la loi de Coulomb dynamique : $R_T=f R_N$

RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}_N+\vec{R}_T+\vec{F}_{el}$, variables inconnues à droite : on projette.

Projections : Il faut ajouter un axe vertical (Oy) puisque les forces sont en 2D.

Cinématique : $a_x=\ddot{x}$ et $a_y=0$

Pour \vec{F}_{el} , le vecteur unitaire est $\vec{u}=+\vec{u}_x$, et $L=x$, donc

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0+0+\bar{R}_T-k(x-L_0) & \text{donc } R_N=mg \text{ et } R_T=fmg, \bar{R}_T=\pm R_T=\pm fmg \text{ (+ au début).} \\ 0=-mg+R_N+0+0 \end{cases}$$

L'ED est donc $m\ddot{x}+kx=kL_0\pm fmg$: $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}\left(L_0\pm\frac{fmg}{k}\right)$, donc $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $D=\frac{fmg}{k}$.

2. On doit donc résoudre l'ED avec un + pour trouver l'équation horaire quand x diminue :

La SP (constante, comme le second membre) est donc (on raye la dérivée seconde) : $x_p=L_0+D$, et la solution générale homogène SGH est $x_H(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$.

L'éq est linéaire, donc le théorème de structure s'applique : $x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+L_0+D$.

On applique les CI : $x(0)=2L_0=A+L_0+D$, donc $A=L_0-D$.

On dérive pour la vitesse : $v(t)=\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$, donc $v(0)=B\omega_0=0$ et $B=0$.

Finalement : $x(t)=(L_0-D)\cos(\omega_0 t)+L_0+D$, il s'agit d'une sinusoïde oscillant autour de sa valeur moyenne, donc de $\text{Off}_1=L_0+D$

t_1 est donc la date du premier minimum de x, quand le $\cos(\omega_0 t)$ vaut -1 pour la première fois, donc quand

$$\omega_0 t=\pi : t_1=\frac{\pi}{\omega_0}$$

Correction DS n°4 physique PCSI2

2ème résolution : on suppose donc qu'on démarre à $t=0$, et \vec{R}_T a bien sûr changé de sens, l'ED est devenue $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (L_0 - D)$, donc la solution générale est $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + L_0 - D$.

En effet, on sait que, comme avant, la constante devant le sinus sera nulle puisque la vitesse est nulle à la date nulle.

CI : $x(0) = A + L_0 - D = 2D$, donc $A = 3D - L_0$: $x(t) = (3D - L_0) \cos(\omega_0 t) + L_0 - D$, sinusoïde qui oscille autour de $\text{Off}_2 = L_0 - D$.

Par ailleurs elle redevient maximale lorsque la phase augmente de π une deuxième fois : en effet le coefficient $3D - L_0$ est négatif.

Sa valeur (donc à la date réelle $t_2 = 2t_1$) est donc $-(3D - L_0) + L_0 - D = 2L_0 - 4D$.

3. On voit que les offsets alternent à cause du changement de signe dans l'ED, avec une diminution régulière de l'amplitude à chaque demi oscillation.

Il arrivera une date où la courbe ne coupera plus la position d'équilibre L_0 : par exemple, si l'on suppose que c'est quand x diminue, la tangente devient horizontale, donc la vitesse s'annule, pour $x_{\text{arrêt}} > L_0$.

Il est alors impossible que x augmente à nouveau : la force de rappel est toujours dirigée vers la gauche, puisque son sens n'est lié qu'au signe de $x - L_0$.

Le système se bloque dans les conditions statiques du frottement de Coulomb, avec une somme des forces nulles, et \vec{R}_T exactement opposée à \vec{F}_{el} .

PENDULE SIMPLE PAR L'ÉNERGIE

1. Lorsqu'il s'agit d'une tige, \vec{T} peut être de signe quelconque, car la tige peut « tirer » ou « pousser » sur la masse.

En revanche, lorsque c'est un fil, il ne peut que tirer, donc $\vec{T} \geq 0$; quand \vec{T} s'annule, le fil n'est plus tendu et les hypothèses d'étude du mouvement ne sont plus valables.

2. L'énergie potentielle est ici $E_{pp} = mgz$, où z est l'altitude de M , nécessairement vers le haut. On a $z = \vec{OM} \cdot \vec{e}_z = R \cos(\pi - \theta) = -R \cos \theta$.

En remplaçant, on a bien $E_p(\theta) = -mgR \cos \theta$, minimale en 0, variant entre $\pm mgR$.

3. On se place en coordonnées polaires : $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, qu'on dérive sachant que R est une constante : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

4.a. On regarde les intersections des courbes...

4.b. On a $E_m = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$: l'énergie cinétique, toujours positive, est l'écart algébrique de la courbe de $E_p(\theta)$ vers celle de E_m , ce qui interdit les zones où la courbe de E_p la dépasse.

4.c. On a alors $E_p(\theta) = E_m$ pour ces angles, donc

$$\theta_M = \text{Arccos}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\theta_m = 131,8^\circ.$$

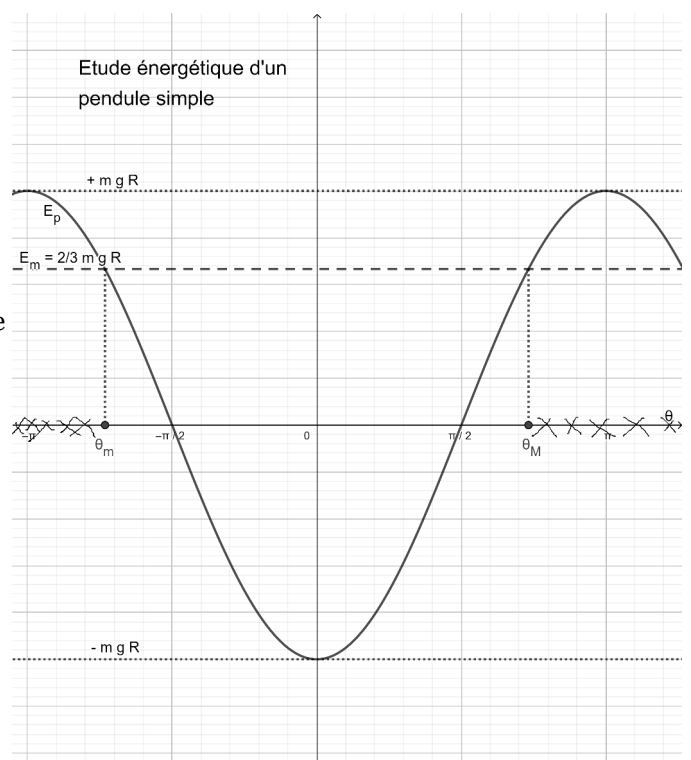
4.d. On tire de la vitesse l'expression générale de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$.

Donc, puisqu'on part de 0 (équilibre stable = min local)

$$E_m = \frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2 - mgR = \frac{2}{3} mgR \text{ soit } \omega_0^2 = \frac{10}{3} \frac{g}{R} \text{ et donc}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{3}} \Omega = 1,826 \Omega.$$

5. La droite de E_m est alors complètement au-dessus de la courbe de $E_p(\theta)$: M arrive en $\theta = \pi$ avec de l'énergie cinétique et continue donc son mouvement, M tourne alors autour de O en décrivant des cercles complets, on parle de comportement révolutif du pendule.



Correction DS n°4 physique PCSI2

6. $E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - m g R \cos \theta$, qui se conserve, donc $\dot{E}_m = 0 = m R^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g R \dot{\theta} \sin \theta$.

On retrouve l'ED du mouvement $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$, soit, pour les petites oscillations $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$, de forme canonique $\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0$, où $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ est la pulsation propre.

7. En continuant la cinématique, on obtient le vecteur accélération en polaires $\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2; R\ddot{\theta})$.

La projection du poids est évidente pour la partie radiale : on obtient $-m R \dot{\theta}^2 = -\bar{T} + m g \cos \theta$, soit $\bar{T} = m g \cos \theta + m R \dot{\theta}^2$.

On reconnaît dans le premier terme $-\frac{E_p}{R}$ et dans le second $2\frac{E_c}{R}$ donc

$$R\bar{T} = 2E_c - E_p = 2(E_m - E_p) - E_p = 2E_m - 3E_p, \text{ ce qui donne le résultat demandé.}$$

8.a. Pour que le fil reste toujours tendu, il faut que $\bar{T} > 0 \Leftrightarrow E_m > \frac{3}{2} E_p(\theta), \forall \theta$. Or, lorsque le pendule oscille, on a $E_m = E_p(\theta)$ aux bords du domaine autorisé, quand $\theta = \theta_M$ ou $\theta = -\theta_M$.

* Quand l'énergie mécanique est négative, donc l'énergie potentielle aussi, on a $\frac{3}{2} E_p(\theta) < E_p(\theta)$, c'est nécessairement vérifié.

* Quand l'énergie mécanique est positive, et inférieure à $m g R$ (oscillations), c'est forcément faux aux bords du domaine.

* Quand l'énergie mécanique est positive et supérieure à $m g R$ (révolution), il faut qu'elle soit supérieure à 1,5 fois le max, atteint pour $\theta = \pi$.

Finalement $E_m \in [-m g R; 0[\cup]1,5 m g R; +\infty[$. On remarque que l'angle le plus grand possible pour que le pendule fonctionne en oscillations est exactement $\pi/2$.

8.b. Quand $E_m = -m g R$, le pendule est évidemment immobile.

$$E_m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2 - m g R = 0 \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{2} \Omega = 1,414 \Omega$$

$$E_m = \frac{3}{2} m g R \Leftrightarrow \frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2 = \frac{5}{2} m g R \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{5} \Omega = 2,236 \Omega$$

Le pendule simple se comporte donc bien pour $\frac{\omega_0}{\Omega} \in [0; 1,414[\cup]2,236; +\infty[$

Correction DS n°4 physique PCSI2

LE SOLEIL A RENDEZ-VOUS AVEC LA PLUIE (CCINP 2023 MP-MPI)

Q1. Un référentiel est l'ensemble constitué :

- d'un solide par rapport auquel on décrit le mouvement. On y fixe un point O, origine d'un repère cartésien ;
- d'une horloge paramétrant le temps.

Il est galiléen s'il vérifie le **principe d'inertie** : un point matériel soumis à aucune action mécanique est soit au repos, soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le poids d'une goutte est l'action de la Terre sur celle-ci. Il s'exprime ainsi :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho \left(\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right) g\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6}\vec{e}_z}$$

Q2. D'une part :

$$\boxed{[\vec{F}_{\text{frott}}]} = [m] \times [\vec{a}] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z] &= [-C] \times [\pi] \times [\rho_a] \times [D]^2 \times [v]^2 \times [\vec{e}_z] \\ &= 1 \times 1 \times \text{M} \cdot \text{L}^{-3} \times \text{L}^2 \times \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2} \times 1 \\ &= \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \end{aligned}$$

Nous avons démontré que $\boxed{[\vec{F}_{\text{frott}}]} = [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z]$: la formule est bien homogène.

Q3. Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à la goutte, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre. Nous utilisons le vecteur \vec{e}_z proposé par l'énoncé. Comme indiqué, le poids et la force de frottement fluide s'appliquent sur la goutte ainsi :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{frott}}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\vec{a} = \vec{0}$ (en effet $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \text{cte}$). D'où, d'après les expressions Q1 et Q2 :

$$\vec{0} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6}\vec{e}_z - C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z = \vec{0}$$

On identifie v_{lim} par projection sur l'axe \vec{e}_z :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}} \sqrt{D}$$

puis $\vec{v}_{\text{lim}} = v_{\text{lim}}\vec{e}_z$, on identifie :

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z}$$

Application numérique : $K = 144 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi :

- pour $D = 1 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 3 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 5 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Nous pouvons lister plusieurs phénomènes :

- les gouttes de grande taille se déforment sous l'effet de la force de traînée, ainsi le coefficient géométrique entre la surface frontale et le volume de la goutte évolue ;
- (HP) les gouttes de petite taille correspondent à un nombre de Reynolds plus petit, où le coefficient de traînée peut être différent. Pour $D < 1 \text{ mm}$, l'évolution de v_{lim} en fonction de D semble être linéaire, indiquant davantage une force de frottement type Stokes ($\vec{F}_{\text{frott}} = -AD\vec{v}$).

Note PA (pour les petits sup) ; j'attends : les gouttes de petite taille vont beaucoup moins vite, le modèle de la force de frottement pourrait se rapprocher des frottements laminaires $-a\vec{v}$; grosses gouttes non sphériques.

Correction DS n°4 physique PCSI2

II Disdromètre à impact avec platine

Q5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la platine dans le référentiel du support (galiléen) dans une situation statique. On utilise le repère proposé par l'énoncé. Sur la platine s'exercent :

— son poids :

$$\vec{P} = Mg\vec{e}_z$$

— la force de frottement :

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{\text{platine}} = \vec{0}$$

car on traite une situation statique ;

— la force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{e}_z$$

en effet, si le ressort est étendu (soit $\ell - \ell_0 > 0$), alors la force est vers le bas ;

— la force d'impact de la goutte $\vec{F}(t) = \vec{0}$ (il n'y a pas d'impact dans cette situation).

Ainsi, appliquons le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{0} = Mg\vec{e}_z + \vec{0} + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{e}_z + \vec{0}$$

En projetant sur \vec{e}_z :

$$Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

Q6. Reprenons la même étude, dans une situation non-statique :

— le mouvement étant limité à une translation sur l'axe z , l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{e}_z$$

— le poids est inchangé ;

— la force de frottement est :

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{\text{platine}} = -\lambda\frac{dZ}{dt}\vec{e}_z$$

— la force de rappel du ressort est :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$$

or $Z = \ell_{\text{éq}} - \ell$ par définition d'où :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0)\vec{e}_z$$

Ainsi :

$$M\frac{d^2Z}{dt^2}\vec{e}_z = Mg\vec{e}_z - \lambda\frac{dZ}{dt}\vec{e}_z + k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0)\vec{e}_z + F(t)\vec{e}_z$$

or $Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$ d'après la question précédente donc, en projetant sur \vec{e}_z :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M}\frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M}Z = F(t)$$

On identifie :

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{k}{M}} \quad \text{de sorte que} \quad \boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma\frac{dZ}{dt} + \beta Z = \frac{F(t)}{M}}$$

Q7. τ correspond à la durée d'impact de la goutte sur la platine (ainsi l'accélération subie est de l'ordre de v_{lim}/τ). Cela correspond à l'intervalle de temps séparant l'impact de la tête de la goutte et l'impact de sa queue. Ainsi, si sa vitesse n'évolue pas au cours de l'impact $v_{\text{lim}}\tau = D$ d'où :

$$\boxed{\tau \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}}$$

Or $v_{\text{lim}} = K\sqrt{D}$ d'où, avec le facteur correctif proposé par l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \xi\frac{\sqrt{D}}{K} = 2,2 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,22 \text{ ms}}$$

Correction DS n°4 physique PCSI2

Q8.a) La réponse du disdromètre est la plus rapide si le facteur de qualité vaut 1/2. Or :

$$\omega_0^2 = \beta \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \gamma$$

Si $Q = 1/2$, alors $\omega_0 = \gamma/2$ d'où :

$$\boxed{\frac{\gamma^2}{4} = \beta}$$

Q8.b) On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}Z = \frac{F_0}{M}$$

avec les conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\frac{dZ}{dt}(0) = 0$. Résolvons d'abord l'équation homogène. Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \gamma r + \frac{\gamma^2}{4} = 0$$

il possède une racine double $r_0 = -\gamma/2$. La solution de l'équation homogène est donc :

$$Z(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. Une solution particulière de cette équation est $Z(t) = \frac{4F_0}{M\gamma^2}$ (en effet, dans ce cas les dérivées sont nulles d'où le résultat). Or :

$$\frac{4}{M\gamma^2} = \frac{1}{\beta M} = \frac{1}{k}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} + (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

Cherchons A et B en utilisant les conditions initiales.

$$Z(0) = \frac{F_0}{k} + B$$

donc, comme $Z(0) = 0$, $B = -\frac{F_0}{k}$. Ensuite :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = 0 + A \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) + (At + B) \left(-\frac{\gamma}{2} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)$$

soit :

$$\frac{dZ}{dt}(0) = A - \frac{\gamma B}{2}$$

ainsi $A = \gamma B/2$ finalement :

$$\boxed{Z(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(\frac{\gamma t}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)}$$

Q8.c) Il faut $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$ soit :

$$\left(\frac{\gamma \tau}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma \tau}{2}\right) = 0$$

γ et τ étant positifs, il est impossible que $\frac{\gamma \tau}{2} + 1$ soit nul. Si $\boxed{\frac{\gamma \tau}{2} \gg 1}$, alors

$$\exp\left(-\frac{\gamma \tau}{2}\right) \ll 1$$

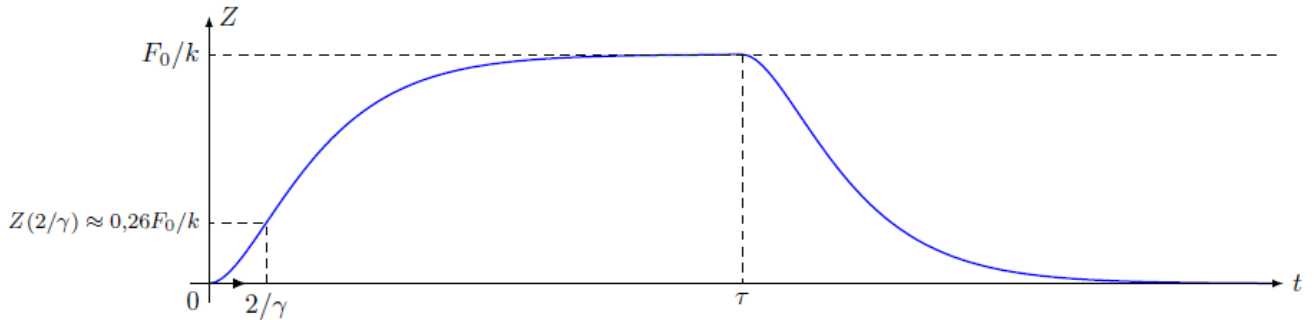
et on peut écrire $\boxed{Z(\tau) = \frac{F_0}{k}}$ Ainsi :

$$Z(\tau) = \frac{\pi \rho D^3}{6} \frac{K \sqrt{D}}{\xi \sqrt{D}} \frac{1}{k} = \frac{\pi \rho K^2}{6 \xi k} D^3$$

On a démontré le résultat demandé avec $\boxed{\alpha = 3}$

Correction DS n°4 physique PCSI2

Q8.d) Pour $\tau < t < 2\tau$, on observe la relaxation du plateau vers sa position d'équilibre sans force, sur un même temps typique :



Q8.e) Le coefficient de proportionnalité entre Z et D^3 est $\frac{\pi\rho}{6} \frac{K^2}{\xi k}$ ne dépend pas de la goutte. La connaissance de ces différents coefficients ou un étalonnage permet de relier Z à D .

Merci à MM. Leconte et Blond-Butlen pour la correction.

PROTON DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE CONSTANT UNIFORME

1. Le poids étant négligé et la charge du proton étant $q = +e$, on obtient
$$\begin{cases} m\dot{v}_x = +e B v_y \\ m\dot{v}_y = -e B v_x \end{cases}$$
2. Si x est vers la droite, et l'axe z dans l'œil, l'axe y est nécessairement vers le haut (3 doigts car base directe)
3. \vec{F}_L est dans le sens de $\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$, car $q > 0$, donc vers les « $-y$ » : le demi cercle est vers le bas, car la force est vers l'intérieur du virage.
4. On obtient donc
$$\begin{cases} m\dot{v}_x = +e B v_y - \alpha v_x \\ m\dot{v}_y = -e B v_x - \alpha v_y \end{cases}$$
5. On ajoute la première équation à j fois la seconde : $m\dot{v}_x + j m\dot{v}_y = +e B v_y - j e B v_x - \alpha v_x - j \alpha v_y$, soit $m(\dot{v}_x + j \dot{v}_y) = -j e B (v_x + j v_y) - \alpha (v_x + j v_y)$, donc bien $\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\lambda + j\omega)\mathbf{v} = 0$, avec $\lambda = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega = \frac{eB}{m}$.

6.a. On cherche une solution de la forme $A e^{rt}$, où $A \neq 0$.

Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, on trouve que $r = -(\lambda + j\omega)$.

Avec la condition initiale $\mathbf{v}(0) = v_0 + j0 = v_0$, on obtient $\mathbf{v}(t) = v_0 \exp[-(\lambda + j\omega)t]$.

6.b. On prend la partie réelle et la partie imaginaire du résultat, en simplifiant l'exponentielle de la somme :

$$\begin{cases} v_x = +v_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \\ v_y = -v_0 e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

7.a. L'intégration de l'expression complexe précédente donne $\mathbf{x}(t) = -\frac{v_0}{\lambda + j\omega} \exp[-(\lambda + j\omega)t] + \underline{A}$, qui vaut 0 en $t=0$ (car x et y sont nulles).

Finalement :
$$\mathbf{x}(t) = \frac{v_0}{\lambda + j\omega} (1 - \exp[-(\lambda + j\omega)t])$$

7.b. Quand $t \rightarrow +\infty$, l'exponentielle complexe tend vers 0, car sa partie réelle est négative (cf 6.b).

Il reste alors $\mathbf{x}_\infty = \frac{v_0}{\lambda + j\omega} = \frac{v_0}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda - j\omega)$, opération exceptionnelle, mais on souhaite ici les parties réelle et imaginaire.

Les coordonnées finales sont donc
$$\left(+v_0 \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}; -v_0 \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) = \left(+R \frac{k}{1+k^2}; -R \frac{1}{1+k^2} \right)$$
, car $R = \frac{m v_0}{e B} = \frac{v_0}{\omega}$.