SATELLISATION AUTOUR DE LA TERRE

(Construction de l'animation)

1. Réglages (données en entrée)

On fixe le rayon terrestre comme référence (égal à 1 dans la simulation), et on pose pour les calculs $GM_T=1$.

De façon générale, on raisonne en grandeurs réduites : il est toujours préférable de raisonner avec des grandeurs voisines de l'unité plutôt qu'avec des puissances de 10 très grandes ou très petites.

En effet

- la stabilité dans les calculs numériques est meilleure ;
- les résultats sont finalement plus parlants.

On peut régler

- librement, la position M_o du point de départ de l'orbite : la distance $OM_o=r_o$ est donc obtenue en nombre de rayons terrestres ;
- l'angle de la vitesse initiale avec la direction orthoradiale $\alpha_o=(\vec{e}_\theta,\vec{v}_o)$, angle orienté, entre -90° et +90° (on impose un mouvement dans le sens trigonométrique) ;

  Remarque : on autorise dans l'animation des angles de -89,5° à +89,5° avec un pas de 1° car les valeurs extrêmes posent problème, ainsi que l'angle nul.
- la valeur de la vitesse initiale, en unité de v_{lib} , vitesse de libération à partir du sol terrestre : $v_o=v_{\text{red,o}}v_{\text{lib}}$.
  Rappel : $v_{\text{lib}}=\sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}}$, donc, avec $GM_T=1$ et $R_T=1$, la vitesse s'exprime par $v=v_{\text{red}}\sqrt{2}$
  Exemple : avec M_o sur le sol terrestre et $v_{\text{red,o}}=1$, on aura exactement la libération donc une énergie mécanique nulle (parabole : cf image exportée).

2. Calculs et construction

- vitesse radiale initiale $\mathring{r}_o=v_{o,r}=-v_{\text{red},o}\sqrt{2}\sin(\alpha_o)$
- constante des aires $C=r_o v_{o,\theta}=r_o v_{\text{red},o}\sqrt{2}\cos(\alpha_o)$

On démontre (hors programme – Binet) que l'équation polaire de la trajectoire est $r(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$, où ce qu'on nomme paramètre vaut $p=\dfrac{C^2}{GM_T}$.

- calcul de $p=C^2$

On déduit de l'équation polaire $\mathring{r}=\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{pe\sin(\theta-\varphi)\mathring{\theta}}{[1+e\cos(\theta-\varphi)]^2}=\dfrac{r^2}{p}e\sin(\theta-\varphi)\mathring{\theta}$, soit puisque $C=r^2\mathring{\theta}$ $\mathring{r}=\dfrac{C}{p}e\sin(\theta-\varphi)=\dfrac{GM_T}{C}e\sin(\theta-\varphi)$.

Finalement, on a le système : $\begin{cases} e\cos(\theta-\varphi)=\dfrac{p}{r}-1 \\ e\sin(\theta-\varphi)=\dfrac{C\mathring{r}}{GM_T} \end{cases}$, d'où l'on tire avec les CI l'excentricité e de la trajectoire $e=\sqrt{\left(\dfrac{p}{r}-1\right)^2+\left(\dfrac{C\mathring{r}}{GM_T}\right)^2}$, ainsi que la valeur initiale de $\theta-\varphi$:
$\theta-\varphi=\mathrm{sgn}(\mathring{r})\ \mathrm{Arccos}\left[\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{p}{r}-1\right)\right]$

- Comme l'angle polaire initial $\theta_0=(Ox, O\vec{M}_0)$ est connu, on obtient la direction φ de l'axe principal de la trajectoire.
- On trace la courbe en polaires.
- Le périgée P est obtenu quand $\theta=\varphi$: on vérifie facilement avec l'équation que c'est pour cette valeur de θ que r est minimale.
- La vitesse au périgée est $v_P=\dfrac{C}{r_P}$, puisque la vitesse est orthoradiale en ce point.

D'après l'équation polaire, r n'est défini pour tout θ que si $e<1$ (dans le cas contraire, il existe un ou plusieurs angles tels que r tend vers l'infini, ou serait négatif, ce qui n'a pas de sens) : le mouvement est **elliptique** si et seulement si $0<e<1$.

- On place un point M quelconque sur la trajectoire et on construit les vecteurs polaires.

Pour obtenir la vitesse en M, on peut passer par l'énergie mécanique :

- On calcule avec les CI : $e_m=\dfrac{1}{2}v^2-\dfrac{GM_T}{r}$, énergie mécanique par unité de masse du système, qui se conserve.
- On en déduit la norme de la vitesse en M : $v_M=\sqrt{2}\sqrt{e_m+\dfrac{GM_T}{r_M}}$
- On trace la tangente à la trajectoire en M
- On place l'intersection de cette tangente avec le demi cercle de rayon v_M (vers l'avant du mouvement).

Lorsque la courbe est fermée, donc le mouvement est elliptique : $e<1 \Leftrightarrow e_m<0$, l'énergie mécanique est alors $E_m=-\dfrac{GM_T m}{2a}$.

- On en déduit le demi grand axe a, puis le point A à l'opposé de P
- On peur calculer la vitesse à l'apogée avec $C=r_A v_A$.
- La période orbitale en fonction de la période de l'orbite rasante (telle que $a=R_T$) avec la loi de Kepler $\dfrac{T^2}{a^3}=\mathrm{cte}$ donc $T=a^{3/2}T_{\text{basse}}$.
- On peut déterminer le demi petit axe b soit avec les propriétés géométriques de l'ellipse (on montre que $b=a\sqrt{1-e^2}$), soit avec la loi des aires $\pi a b=\dfrac{1}{2}CT$