PCSI2 – Correction DM 12 — Problème à deux corps (et demi)

Dans le cours, nous avons étudié les orbites d'un système autour d'un astre central fixe unique.

En astronomie, cette situation est fréquente, mais n'est pas la seule : beaucoup d'étoiles sont dites doubles, car elles orbitent l'une autour de l'autre, en tournant autour de leur **centre de gravité G**.

On considère ici deux corps célestes (étoiles doubles ou planète avec un satellite), de centres notés P_1 et P_2, et de masses respectives m_1 et m_2.

La masse totale est notée $m_T = m_1 + m_2$ et le rapport des masses est noté $k = \frac{m_1}{m_2} \geq 1$: on peut supposer que le corps n°1 est le plus massif.

On prendra leur centre de gravité G comme origine du repère polaire : on note $R_1 = G P_1$ (distance), $R_2 = G P_2$ et $D = P_1 P_2 = R_1 + R_2$.

Dans tout le problème, la distance D est supposée **constante** : chacun des astres tourne autour de G en décrivant une orbite circulaire (ce n'est pas le cas général en astronomie : on peut obtenir deux ellipses).

Partie A : problème à 2 corps ...

1. Obtenir l'expression de chacune des masses des astres en fonction de m_T et de k.

   $\begin{cases} m_T = m_1 + m_2 \\ m_1 = k\, m_2 \end{cases}$ donc $m_2 = \frac{1}{k+1} m_T$ et $m_1 = \frac{k}{k+1} m_T$

2. Rappeler la définition du centre de gravité (barycentre), et en déduire chaque distance R_1, R_2 en fonction de D et k. Schématiser pour $k=2$.

   $m_1 \vec{GP}_1 + m_2 \vec{GP}_2 = \vec{0}$: $m_1 \vec{GP}_1 = -m_2 \vec{GP}_2$ où l'on prend les normes, donc $m_1 R_1 = m_2 R_2$, puis $R_2 = k\, R_1$ et comme $R_1 + R_2 = D$, le système est le même que le précédent mais où l'on a échangé les indices 1 et 2, donc $R_1 = \frac{1}{k+1} D$ et $R_2 = \frac{k}{k+1} D$.

   AN pour $k=2$: $R_1 = \frac{1}{3} D$ et $R_2 = \frac{2}{3} D$ (voir schéma à la fin, avec tout).

3. En appliquant une loi sur chacun des astres, montrer que la vitesse angulaire commune vérifie $\omega^2 = \frac{G\, m_T}{D^3}$.

   Référentiel : d'origine G, d'axes pointant vers des étoiles lointaines fixes, supposé galiléen.

   Système : P_2, de masse m_2

   Contrainte : d'énoncé : MC de centre G, forces dans le plan, donc coordonnées polaires

   BdF : Force gravitationnelle seule $\vec{F}_{1/2} = -\frac{G\, m_1 m_2}{D^2} \vec{u}_r$, en définissant $\vec{u}_r$ de P_1 vers P_2.

   RFD : $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{1/2}$ où il faut déterminer $\vec{a}_2$ par la cinématique : $\vec{GP}_2 = R_2 \vec{u}_r$ donc, R_2 étant constante $\vec{v}_2 = R_2 \omega \vec{u}_\theta$, puis $\vec{a}_2 = R_2 \mathring{\omega} \vec{u}_\theta - R_2 \omega^2 \vec{u}_r$

   Projections : $\begin{cases} -m_2 R_2 \omega^2 = -\frac{G\, m_1 m_2}{D^2} \\ m_2 R_2 \mathring{\omega} = 0 \end{cases}$.

   On tire de la seconde équation que $\mathring{\omega} = 0$ donc que ω est une constante, le MC est donc uniforme, et de la première que $\omega^2 = \frac{G m_1}{R_2 D^2}$, qui n'est pas encore le résultat demandé, mais $m_1 = \frac{k}{k+1} m_T$ et $R_2 = \frac{k}{k+1} D$, donc $\frac{m_1}{R_2} = \frac{m_T}{D}$.

--

On vérifie que le calcul donne le même résultat sur l'astre P_1 : mêmes référentiel et contraintes, la force est maintenant (actions réciproques) : $\vec{F}_{2/1} = \frac{G m_1 m_2}{D^2} \vec{u}_r$ et le vecteur position est $\vec{GP}_1 = -R_1 \vec{u}_r$: $\vec{v}_1 = -R_1 \omega \vec{u}_\theta$, puis $\vec{a}_1 = -R_1 \mathring{\omega} \vec{u}_\theta + R_1 \omega^2 \vec{u}_r$, en gardant la définition précédente de $\vec{u}_r$ (de G vers P_2).

Si l'on change la convention pour que le vecteur $\vec{u}_r$ soit attaché à P_1 , c'est son signe qui change car $\vec{u}_r(P_1) = -\vec{u}_r(P_2)$ (rotation d'angle π) : il reste alors un signe – dans la force, et les vecteurs cinématiques retrouvent leurs expressions usuelles.

On obtient de toute façon (aux signes près qui se simplifient) : $\begin{cases} m_1 R_1 \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{D^2} \\ m_1 R_1 \mathring{\omega} = 0 \end{cases}$ donc

$\omega^2 = \frac{G m_2}{R_1 D^2}$ avec $m_2 = \frac{1}{k+1} m_T$ et $R_1 = \frac{1}{k+1} D$ et la même expression finale de ω^2 .

Partie B : ... et à 2 corps et demi

On s'intéresse à un système M de masse *m*, négligeable devant m_1 et m_2 : son effet gravitationnel sur les astres est négligeable.

M peut se trouver n'importe où dans l'espace, pas nécessairement sur la droite $(P_1 P_2)$.

On note alors les distances $r_1 = M P_1$, $r_2 = M P_2$ et $r = M G$, et les forces gravitationnelles exercées sur M par $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux positions d'équilibre de M dans le système $(P_1 ; P_2)$: le mouvement de M est donc « le même » que celui des astres, les distances r, r_1, r_2 restent toujours constantes.

1. Quelle est nécessairement la nature du mouvement de M ? dans quel plan ?

   Tout doit tourner « en bloc », comme un solide. On en déduit que le mouvement de M est nécessairement un cercle de centre G, à la vitesse angulaire ω obtenue précédemment, et dans le plan de rotation de $(P_1 ; P_2)$.

2. En déduire que le vecteur $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ est nécessairement colinéaire au vecteur $\vec{MG}$.

   Le mouvement de M étant circulaire uniforme (ω est constante), l'accélération est donc purement radiale (centripète), donc dirigée de M vers G.

   D'après la 2ème loi de Newton, on a $m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$: le MCU n'est donc possible qu'à la condition de colinéarité.

3. Expliquer pourquoi on peut écrire chaque force gravitationnelle sur M par $\vec{F}_i = G m m_i \frac{\vec{MP}_i}{r_i^3}$.

   Voir le schéma : on a par définition $\vec{F}_1 = -\frac{G m m_1}{r_1^2} \vec{u}_{P1 \to M}$, avec $\vec{MP}_1 = -r_1 \vec{u}_{P1 \to M}$, ce qui donne bien le résultat, et même calcul pour $\vec{F}_2$.

4. En transformant la définition du barycentre pour faire intervenir les vecteurs $\vec{MP_i}$ et $\vec{MG}$, prouver que si M n'est pas sur la droite $(P_1 P_2)$, alors, pour vérifier B.2., il faut et il suffit que $r_1 = r_2$. Quel est le lieu des points du plan qui vérifient cette équation ?

   On fait intervenir la relation de Chasles, pour introduire le point M : $m_1(\vec{GM}+\vec{MP_1})+m_2(\vec{GM}+\vec{MP_2})=\vec{0}$, $m_T \vec{GM}+m_1 \vec{MP_1}+m_2 \vec{MP_2}=\vec{0}$ et avec $\vec{GM}=-\vec{MG}$, on trouve $\vec{MG}=\frac{m_1}{m_T}\vec{MP_1}+\frac{m_2}{m_T}\vec{MP_2}$.

   Par ailleurs, $\vec{F}=\frac{G m m_1}{r_1^3}\vec{MP_1}+\frac{G m m_2}{r_2^3}\vec{MP_2}$.

   On souhaite que $\vec{F}$ et $\vec{MG}$ soient colinéaires : on peut donc écrire $\vec{F}=\alpha \vec{MG}$, soit $\vec{F}=\alpha\left(\frac{m_1}{m_T}\vec{MP_1}+\frac{m_2}{m_T}\vec{MP_2}\right)=\frac{\alpha m_1}{m_T}\vec{MP_1}+\frac{\alpha m_2}{m_T}\vec{MP_2}$.

   Si $M \notin (P_1 P_2)$, les deux vecteurs $\vec{MP_1}$ et $\vec{MP_2}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan, ce qui veut dire que tout vecteur se décompose de façon unique sur cette base.

   On en déduit $\frac{\alpha m_1}{m_T}=\frac{G m m_1}{r_1^3}$ et $\frac{\alpha m_2}{m_T}=\frac{G m m_2}{r_2^3}$: $\alpha=\frac{G m m_T}{r_1^3}=\frac{G m m_T}{r_2^3}$, ce qui n'est réalisé que si et seulement si $r_1=r_2$, qu'on peut noter r_{12} (notation *r* interdite : déjà utilisée).

   Tous les points M tels que $r_1=r_2$, soit $MP_1=MP_2$, sont situés sur la médiatrice de $(P_1 ; P_2)$, droite perpendiculaire à $(P_1 P_2)$, passant par leur milieu (si l'on raisonne dans l'espace, le lieu est le plan médiateur de $(P_1 ; P_2)$).

   <u>Remarque</u> : si $M \in (P_1 P_2)$, toutes les positions de M conviennent pour que la somme des forces soit colinéaire à $\vec{MG}$: il existe d'autres positions d'équilibre sur cette droite, pas étudiées ici.

5. Avec une seconde propriété obligatoire du mouvement de M, démontrer que $r_1=r_2=D$. Conclure : rédiger où se situent exactement les positions d'équilibre de M qui ne sont pas sur $(P_1 P_2)$.

   On peut maintenant écrire la somme des forces comme $\vec{F}=\frac{G m m_T}{r_{12}^3}\vec{MG}$, et l'on sait que M est en MCU de vitesse angulaire ω.

   On définit bien sûr ici le vecteur polaire radial $\vec{u_r}$, de G vers M, donc $\vec{GM}=r\vec{u_r}$, soit $\vec{v}=r\omega\vec{u_\theta}$ et $\vec{a}=-r\omega^2\vec{u_r}$ (mouvement uniforme : on sait maintenant que ω est constante).

   On peut l'écrire $\vec{a}=-\omega^2\vec{GM}=\omega^2\vec{MG}$.

   La RFD donne alors $m\omega^2\vec{MG}=\frac{G m m_T}{r_{12}^3}\vec{MG}$, donc (on ne divise pas par un vecteur bien sûr !! on peut le factoriser et identifier au vecteur nul, ou prendre la norme de l'expression...) : $\omega^2=\frac{G m_T}{r_{12}^3}$, mais on a obtenu $\omega^2=\frac{G m_T}{D^3}$.

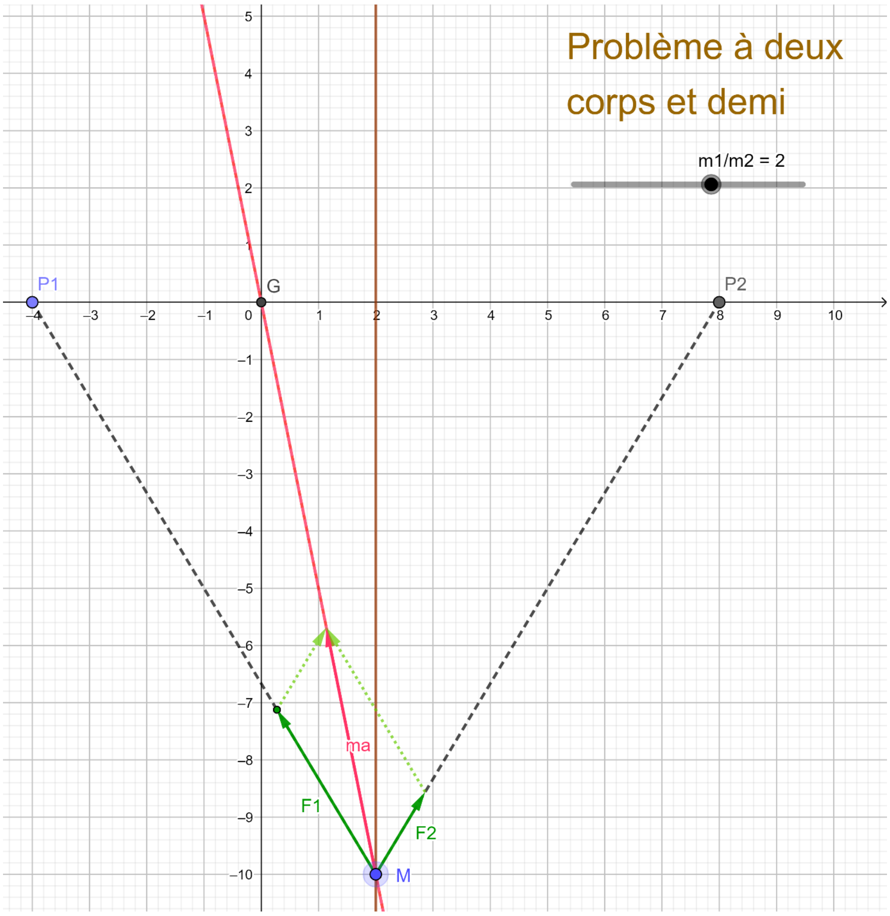
   On en déduit $r_{12}^3=D^3$, donc $r_1=r_2=D$, distance qui sépare les deux astres.

   Comme M doit se trouver dans le plan de rotation, on en déduit qu'il y a deux positions d'équilibre, telles que P_1, P_2 et M forment un triangle équilatéral.

   En supposant une rotation dans le sens trigonométrique sur le schéma ci-après :

   - une position au-dessus de la droite : M est en avance sur P_2 et en retard sur P_1
   - l'autre (schématisée) en-dessous où M est en retard sur P_2 et en avance sur P_1.

M sur la médiatrice :



M hors de la médiatrice :