TD 18 – Gravitation correction

1. Chez le Petit Prince

a) L'altitude h vaut environ 20-30 cm. L'Ep au plut haut est donc égale à l'Em (la vitesse s'annule) et est égale à mgh avec la référence des z prise au sol.
Avant le saut, l'Em était nulle (pas de vitesse, altitude nulle) : on a donc créé $E=mgh\approx 150\,\mathrm{J}$ ou encore $E/m=gh=2{,}5\,\mathrm{J/kg}$

b) Pour une même dépense d'énergie, on a donc $E_c=150\,\mathrm{J}$ à l'état initial, mais on se libère de l'astre pour une énergie mécanique nulle : $E_{p,G}+E_c=0$ donc $\frac{GM}{R}=\frac{E}{m}$.
La masse de l'astre est $M=\frac{4}{3}\pi R^3\mu$ où $\mu\approx 2500\,\mathrm{kg/m^3}$ est sa masse volumique :
$\frac{4}{3}\pi G R^2\mu=\frac{E}{m}\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{3}{4\pi G\mu}\frac{E}{m}}=1{,}9\,\mathrm{km}$

2. Objectif Lune

Données : pesanteur au sol $g_0=9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ et rayon terrestre $R_T=6\ 370\,\mathrm{km}$

(a) Voir le cours $v_2=\sqrt{2g_0R_T}=11{,}2\,\mathrm{km/s}$.

(b) La vitesse est bien inférieure à la seconde vitesse cosmique, mais l'altitude n'est pas nulle ici : la distance au centre de la Terre de la fusée est donc environ (si tir vertical) : $r=R_T+h$ avec $h=3185\,\mathrm{km}$.
La vitesse de libération, définie par une énergie mécanique nulle est donc telle que $\frac{1}{2}mv_L^2-\frac{GM_Tm}{r}=0$ soit $v_L=\sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T+h}}=9{,}123\,\mathrm{km/s}$.
Comme le tir n'est pas nécessairement vertical, Hergé ne s'est probablement pas trompé.

4. Freinage d'un satellite quasi circulaire

(a) On applique directement la RFD : $\vec{F}=-\frac{GM_Tm}{r^2}\vec{e}_r=m\vec{a}=-m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$: le caractère purement radial de la force rend nulle la composante orthoradiale de l'accélération.
On en déduit $v=\sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ et comme $g_0=\frac{GM_T}{R_T^2}$ et $r=R_T+h$: $\boxed{v=R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}=7{,}80\,\mathrm{km/s}}$

(b) Le mouvement est alors uniforme (pas d'accélération orthoradiale donc $\frac{dv}{dt}=0$). Le périmètre du cercle est $2\pi r$ donc $v=\frac{2\pi r}{T}$ donc $\frac{4\pi^2r^2}{T^2}=\frac{GM_T}{r}$: $T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ soit $T=\frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$. On calcule $\underline{T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}=5\ 370\,\mathrm{s}=1\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}}$.

(c) Sur une période, la force de frottement est constante car le mouvement est uniforme; elle est de plus toujours opposée au déplacement, son travail sur une période est donc $W_T(\vec{f})=-f.vT=-\alpha mv^3T$, qui d'après le TEM est égal à la variation d'énergie mécanique : $\boxed{\Delta E_m=-\alpha mv^3T}$, négative, ce qui est normal.
Pour un mouvement circulaire, on a $E_m=-E_c$ donc $\Delta E_c=-\Delta E_m$ soit $\boxed{\Delta E_c=+\alpha mv^3T}$, positive, ce qui est plus surprenant : la vitesse augmente.

3. Masse de l'étoile

Relation masse – rayon – période : 3ème loi de Kepler

On trouve environ 14,1 fois la masse solaire, avec une planète presque à la même distance que la Terre du Soleil : la planète est bien trop chaude.

5.

1 • La relation fondamentale de la dynamique projetée sur $\vec{e}_r$ donne $-\frac{Mv^2}{r} = -G\frac{MM_T}{r^2}$, où M_T est la masse de la Terre. Avec $g_0 = \frac{GM_T}{R^2}$, on obtient $v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$. On en déduit $\omega_0 = \frac{v}{r} = \sqrt{g_0\frac{R^2}{r^3}}$.

L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$\mathscr{E}_P = -M\frac{GM_T}{r} = -g_0 M\frac{R^2}{r}.$$

L'énergie mécanique $\mathscr{E}(r)$ du système est donc :

$$\mathscr{E}(r) = \frac{1}{2}Mv^2(r) - Mg_0\frac{R^2}{r} = -Mg_0\frac{R^2}{2r}.$$

2 • L'énergie mécanique de la fusée sur le pas de tir est : $\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2 - Mg_0R$ avec $v_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)R\cos\lambda$.

3 • $\Delta\mathscr{E}$ représente l'énergie à fournir au système pour le mettre en orbite. Elle diminue quand $\cos\lambda$ augmente, donc quand λ diminue : les meilleures bases de lancement sont les plus proches de l'équateur.

4 • $\Delta\mathscr{E}(\lambda_1) - \Delta\mathscr{E}(\lambda_2) = 2M\left(\frac{\pi R}{T}\right)^2(\cos^2\lambda_2 - \cos^2\lambda_1)$.

Par unité de masse, l'économie d'énergie est de 24 kJ, ce qui semble assez faible, si on la compare à $\Delta\mathscr{E}(\lambda_2) \approx 32{,}8 \,.\, 10^3$ kJ pour 1 kg de charge.

5 • $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\frac{(R+H)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g_0}}$,

soit : $H = \left(\frac{RT_0\sqrt{g_0}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - R = 20{,}3.10^3$ km.

6. Stabilité des orbites circulaires

a) cours

b) cours

c) cours : on a $\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}$ d'où l'équation différentielle : $m\left(\ddot{r}-\frac{C^2}{r^3}\right)=-\frac{mk}{r^n}$.

d) Puisque $r=r_0(1+\varepsilon)$, on trouve $\dot{r}=r_0\dot{\varepsilon}$ et $\ddot{r}=r_0\ddot{\varepsilon}$, et, pour pouvoir utiliser l'approximation donnée : $r_0\ddot{\varepsilon}-\frac{C^2}{r_0^3}(1+\varepsilon)^{-3}=-\frac{k}{r_0^n}(1+\varepsilon)^{-n}$ soit $r_0\ddot{\varepsilon}-\frac{C^2}{r_0^3}(1-3\varepsilon)=-\frac{k}{r_0^n}(1-n\varepsilon)$, qu'on arrange : $\ddot{\varepsilon}+\left(3\frac{C^2}{r_0^4}-\frac{nk}{r_0^{n+1}}\right)\varepsilon=\frac{C^2}{r_0^4}-\frac{k}{r_0^{n+1}}$

e) Quand il n'y a pas de perturbation, $r=r_0$, et donc $\forall t\ \varepsilon(t)=0$, qui doit être une solution valide pour l'équation différentielle obtenue.

Ce n'est possible que si sa SP est nulle, donc si $\frac{C^2}{r_0^4}=\frac{k}{r_0^{n+1}}$

f) On trouve finalement $\ddot{\varepsilon}+(3-n)\frac{k}{r_0^{n+1}}\varepsilon=0$ qui ne sera harmonique que si le coefficient devant ε est positif, donc si $n<3$.

g) Si elle est harmonique, on peut l'écrire $\ddot{\varepsilon}+\omega_0^2\varepsilon=0$, dont la solution générale est $\varepsilon(t)=E\cos(\omega_0 t+\varphi)$, qui varie entre -E et +E et donc reste petit si les conditions initiales de la perturbation $(\varepsilon_0;\dot{\varepsilon}_0)$ sont petites.

Sinon, on peut l'écrire $\ddot{\varepsilon}-K^2\varepsilon=0$, dont la solution générale est $\varepsilon(t)=A_1e^{Kt}+A_2e^{-Kt}$: même si les valeurs initiales $(\varepsilon_0;\dot{\varepsilon}_0)$ sont petites, $\varepsilon(t)$ tendra le plus souvent vers l'infini (dès que $A_1\neq 0$).
Dans le cas de la gravitation, $n=2$: on retrouve bien que les orbites circulaires sont stables.

7. Force centrale non conservative : tension d'un fil

a) Réf : labo, galiléen. Contrainte : mouvement plan => $z(t)=0\,\forall t$

BdF : poids $\vec{P}$, réaction normale (car pas de frottements) du plan $\vec{R_N}$, tension $\vec{T}$

RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R_N}+\vec{T}$

Projections : coordonnées polaires (cylindriques en réalité : toutes les forces ne sont pas dans le plan du mouvement de M), donc cinématique qui donne les équations :

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-T \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=0 \\ 0=P-R_N \end{cases}$$ car pas de mouvement vertical, donc accélération selon cet axe nulle.

Donc $P=R_N$: les forces verticales se compensent, et il ne reste que la tension du fil $\vec{T}=-T\vec{u_r}$, purement radiale (ou centrale : même notion).

On peut utiliser directement que $C=r^2\dot{\theta}$, ou bien redémontrer que c'est une constante à l'aide de l'équation orthoradiale en dérivant C (cf cours).

On en tire $\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}\Rightarrow\dot{\theta}^2=\frac{C^2}{r^4}$: $m\left(\ddot{r}-\frac{C^2}{r^3}\right)=-T$.

b) Contrainte : mouvement vertical BdF : poids $\vec{P}'$, tension $\vec{T}'$
RFD : $\mu\vec{a}'=\vec{P}'+\vec{T}'$ Projections : sur z seulement : $\mu\ddot{z}=\mu g-T$

c) Il faut éliminer T et $\ddot{z}$: on voit que $L=r+z,\ \ \forall t$, donc puisque L est constante $\ddot{r}+\ddot{z}=0$, ce qui donne $\mu\ddot{r}=-\mu g+T$, puis $m\left(\ddot{r}-\frac{C^2}{r^3}\right)+\mu\ddot{r}+\mu g=0$ et l'équation cherchée.

d) Dans un mouvement circulaire, le rayon ne varie pas, donc $m\frac{C^2}{r_0^3}=\mu g$, soit $r_0=\sqrt[3]{\frac{mC^2}{\mu g}}$.

Mais $C=r_0^2\dot{\theta}_0$, donc $C^2=r_0^4\dot{\theta}_0^2$: $mr_0\dot{\theta}_0^2=\mu g$ soit $\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{\mu g}{mr_0}}=20\text{ rad/s}$.

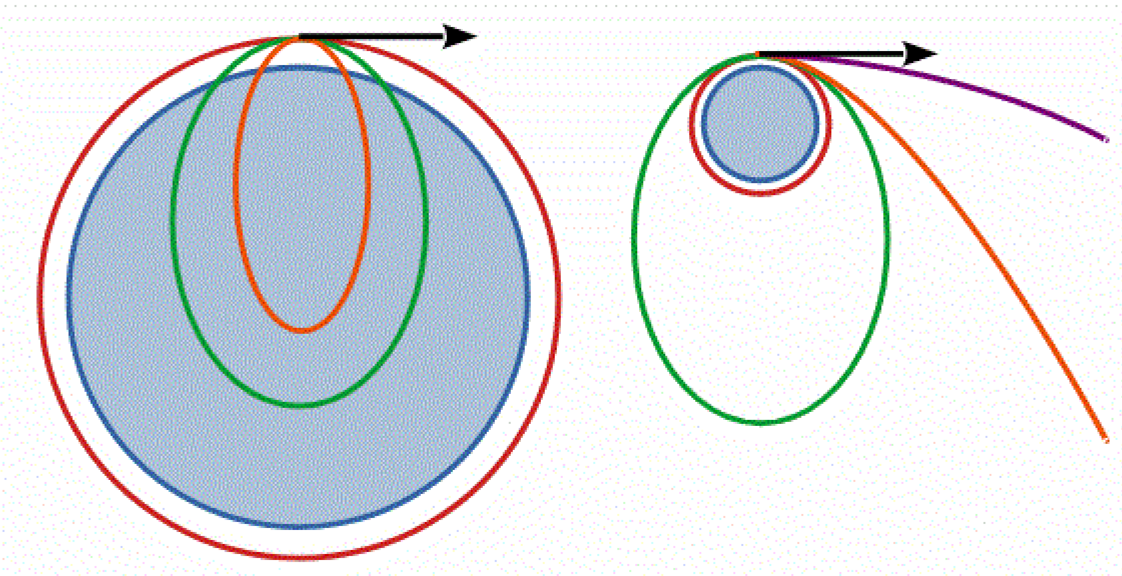
e) On laisse le r_0^3 au dénominateur : $(m+\mu)r_0\ddot{\varepsilon}-m\frac{C^2}{r_0^3}(1-3\varepsilon)=-\mu g$, car $r=r_0(1+\varepsilon)\Rightarrow\dot{r}=r_0\dot{\varepsilon}\Rightarrow\ddot{r}=r_0\ddot{\varepsilon}$.

Les termes constants s'en vont et il reste $\ddot{\varepsilon}+\frac{3mC^2}{(m+\mu)r_0^4}\varepsilon=0$, d'où la pulsation caractéristique $\Omega=\frac{C}{r_0^2}\sqrt{\frac{3m}{m+\mu}}=\sqrt{\frac{3}{1+\frac{\mu}{m}}}\dot{\theta}_0$.

AN : $\Omega=\sqrt{\frac{3}{5}}\dot{\theta}_0=15{,}5\text{ rad/s}$ et $T=0{,}406\text{ s}$, à comparer avec la période de révolution pour le mouvement circulaire : $\frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}=0{,}314\text{ s}$: on verra donc pas d'oscillations autour du cercle de rayon r_0 , mais un cercle déformé.

Remarque : ajouter une vitesse radiale dans les conditions initiales ne modifie pas la constante des aires C ; C aurait changé avec une autre perturbation telle qu'une modification de r_0 ou de $\dot{\theta}_0$.

8. Illustration des Principia Mathematica de Newton



Pour des faibles vitesses, le mouvement est parabolique, mais ce n'est que l'approximation d'une ellipse dont le centre de la Terre est un foyer.

Quand v_0 augmente en restant orthoradiale, on arrive à une trajectoire de satellisation circulaire (première vitesse cosmique pour cette altitude).

Quand v_0 augmente encore, on a à nouveau une ellipse, mais plus large : le centre de la Terre est l'autre foyer, celui qui est le plus proche du point de départ M_0.

Remarque : $\vec{v}_0$ étant orthoradiale, M_0 est nécessairement le point A ou le point P de l'ellipse : son grand axe est donc vertical sur la figure.

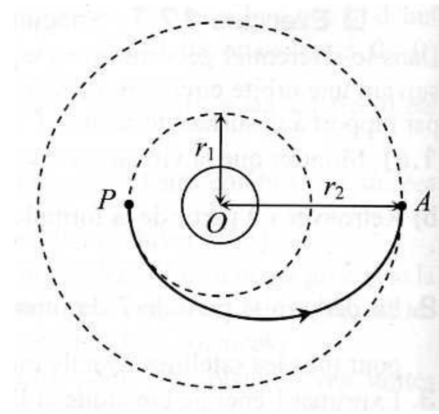
En continuant à augmenter v_0, on trouve d'abord :

- une parabole, l'apogée disparaît tout juste : l'énergie mécanique s'annule exactement (seconde vitesse cosmique pour cette altitude).
- une branche d'hyperbole.

Newton a voulu montrer la continuité physique entre les phénomènes de chute libre dans un champ de pesanteur et la satellisation, donc la chute libre dans un champ gravitationnel.

Il n'a pas tracé les trajectoires pour lesquelles v_0 est supérieure à la première vitesse cosmique.

9. Orbite de transfert



(a) On a $\vec{F}=m\vec{a}$ avec ces deux vecteurs selon $\vec{u}_r$, et donc, puisque le mouvement est circulaire $-\frac{GM_T m}{r_1^2}=-m\frac{v_1^2}{r_1}$ soit

$$\boxed{v_1=\sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}=7{,}30\ \mathrm{km/s}}$$

(b) $\boxed{E_{m1}=-\frac{GM_T m}{2r_1}}$, $\boxed{E_{m2}=-\frac{GM_T m}{2r_2}}$ et $\boxed{E_{\acute{e}l}=-\frac{GM_T m}{r_1+r_2}}$

(c) En P, E_p ne varie pas car elle ne dépend que de la position donc $\Delta E_m(P)=\Delta E_c(P)$ soit $\frac{1}{2}mv_{\acute{e}l}^2=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GM_T m}{r_1+r_2}+\frac{GM_T m}{2r_1}$ soit $\frac{v_{\acute{e}l}^2}{2}=\frac{GM_T}{2r_1}-\frac{GM_T}{r_1+r_2}+\frac{GM_T}{2r_1}$ et donc

$\boxed{v_{\acute{e}l}=\sqrt{\frac{2GM_T r_2}{r_1(r_1+r_2)}}=9{,}52\ \mathrm{km/s}}$ donc $\underline{\Delta v_P=+2{,}22\ \mathrm{km/s}}$

(d) En A et en P, la vitesse est orthoradiale, donc $C=r_1 v_{\acute{e}l}=r_2 v_{\acute{e}2}$ donc $v_{\acute{e}2}=\frac{r_1}{r_2}v_{\acute{e}l}$ soit

$$\boxed{v_{\acute{e}2}=\sqrt{\frac{2GM_T r_1}{r_2(r_1+r_2)}}=1{,}69\ \mathrm{km/s}}$$

(e) $\boxed{v_2=\sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}=3{,}08\ \mathrm{km/s}}$ donc $\underline{\Delta v_P=+1{,}39\ \mathrm{km/s}}$

10. Comète de Halley

<u>Halley</u> 1. 3ème loi de Kepler pour les orbites elliptiques : $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM_S}$

soit $a=2{,}66.10^{12}$ m $=17{,}95$ ua

De plus $r_P+r_A=2a$: $r_A=35{,}32$ ua

2. a) On a $\mathcal{A}=\frac{C}{2}T$ avec $C=r_P v_P$ puisque $\vec{OP}\perp\vec{v}_P$

donc $b=\frac{r_P v_P T}{2\pi a}=6{,}81.10^9$ km : $b=4{,}55$ ua

pas de conversion : rapport.

b) On a $e=\sqrt{1-\left(\frac{4{,}55}{17{,}95}\right)^2}$: $e=0{,}967$

Pour un cercle $a=b=R$ donc $e=0$.

11.

RÉUSSIR UNE SATELLISATION

On a $g_0 R_T^2 = GM_T$

a) $e_m = e_p + e_c = -\frac{GM_T}{r_0} + \frac{1}{2}v_0^2$;

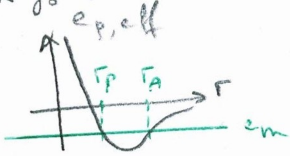
$e_m = -\frac{g_0 R_T^2}{2R_T} + \frac{1}{2}k\, g_0 R_T$; $\boxed{e_m = \frac{1}{2}(k-1)\, g_0 R_T}$

Si l'on souhaite qu'il y ait satellisation, on doit avoir $e_m < 0$: état lié $\iff k < 1$

b) $e_{p,eff} = \frac{C^2}{2r^2} + e_p$ avec $C = r_0 v_{0\theta} = 2R_T \cdot v_0 \sin\frac{\pi}{4}$

soit $C = \sqrt{2}\, R_T \sqrt{k\, g_0 R_T}$

donc $\boxed{e_{p,eff} = \frac{k\, g_0 R_T^3}{r^2} - \frac{g_0 R_T^2}{r}}$



c) En A et en P, on a $e_m = e_{p,eff}$:

$$\frac{1}{2}(k-1)\, g_0 R_T = \frac{k\, g_0 R_T^3}{r^2} - \frac{g_0 R_T^2}{r} \quad ; \ (\times 2r^2)$$

$$\iff (k-1)r^2 + 2R_T r - 2kR_T^2 = 0$$

$$\Delta = 4R_T^2 + 8k(k-1)R_T^2 = 4R_T^2[1 + 2k(k-1)]$$

Soit $\Delta = 4R_T^2(2k^2 - 2k + 1) > 0$ car $k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$.

Donc $\boxed{r_{A\,ou\,P} = R_T \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{k-1}}$

d) On doit donc avoir $k < 1$: $k - 1 < 0$

$r_A = R_T \frac{1 + \sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1-k}$, la plus grande

$r_P = R_T \frac{1 - \sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1-k}$, la plus petite.

Satellisation réussie si et seulement si $r > R_T, \forall r \iff \underline{r_P > R_T}$

$\iff 1 - \sqrt{\ } > 1 - k \iff \sqrt{2k^2 - 2k + 1} < k \iff 2k^2 - 2k - 1 < k^2$

$\iff k^2 - 2k + 1 < 0 \iff (k-1)^2 < 0$

Il est donc <u>impossible d'y parvenir</u>, avec cet angle et de cette altitude, quelle que soit la norme de $\vec{v}_0$.

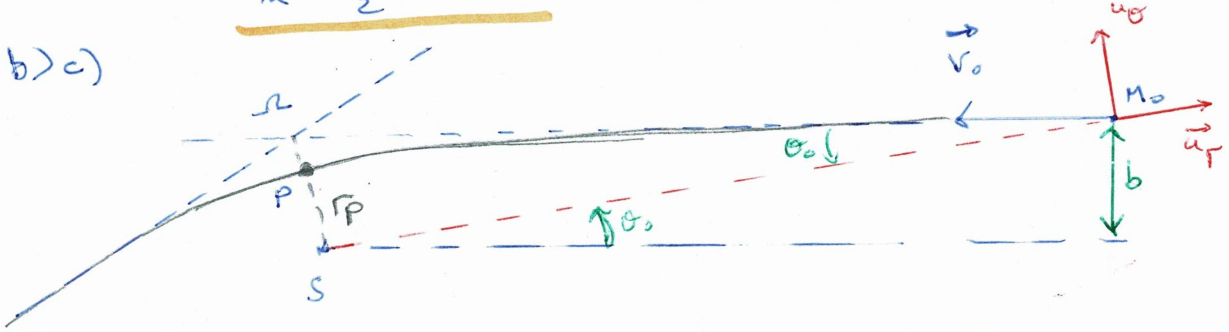
12. Un visiteur spatial

Un visiteur spatial

a) $E_m = E_c + E_{pG}$. Avec l'état initial, on a $E_{pG} \simeq 0$,

donc $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 > 0$: trajectoire hyperbolique.

b) c)



Conservation de l'E_m : $E_{mI} = E_{mF} \Leftrightarrow E_{cI} = E_{cF}$

$\Leftrightarrow v_\infty = v_0$

On a $C = r v_\theta = r_0 v_{0\theta} = r_0 v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = r_0 v_0 \sin\theta_0$.

Par ailleurs $b = r_0 \sin\theta_0$: $C = b v_0$

d) Cours : $\vec{OM} = r\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ donc $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$

or $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_S m}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{G M_S m}{r}$

$C = r^2 \dot{\theta}$: $\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^4}$ et $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m C^2}{2 r^2} - \frac{G M_S m}{r}}$

r_p est solution de $E_m = E_{p,eff}(r)$ car r min en P $\Rightarrow \dot{r} = 0$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m C^2}{2 r^2} - \frac{G M_S m}{r} \Leftrightarrow v_0^2 = \frac{b^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2 G M_S}{r}$ $\times \frac{r^2}{v_0^2}$

$\Leftrightarrow \left[r^2 + \frac{2 G M_S}{v_0^2} r - b^2 = 0 \right]$

$\Delta = 4\left(\frac{G M_S}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2 > 0$: $r = -\frac{G M_S}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{G M_S}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$

Seule la racine positive a un sens :

$r_p = \sqrt{b^2 + K^2} - K$ avec $K = \frac{G M_S}{v_0^2} = 1{,}33 \cdot 10^{14}$ m

donc $r_p = 184\,000$ m $= 184$ km !

L'astéroïde tombe dans le Soleil.

$\left(r_p = K\sqrt{1 + \frac{b^2}{K^2}} - K \simeq \frac{b^2}{2K} = \frac{b^2 v_0^2}{2 G M_S} \right)$

13. Erreur de satellisation

1. L'accélération pour un mouvement circulaire est $\vec{a}=-\frac{v^2}{r}\vec{e}_r+\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$. Comme la force est purement radiale, on a donc $\frac{dv}{dt}=0$: le mouvement est uniforme.

   En utilisant la RFD, on obtient $-\frac{GM_Tm}{r_0^2}=-\frac{v^2}{r_0}$ donc $\boxed{v=\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$ (on peut utiliser $g_0R_T^2$ à la place de GM_T).

2. On a $C=r_0v=\sqrt{GM_Tr_0}$ car ces deux vecteurs sont perpendiculaires pour un mouvement circulaire.

   On a $E_m=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM_T}{r_0}$: on retrouve $\boxed{E_m=-\frac{GmM_T}{2r_0}=-E_c}$

3.
   a) On a maintenant $C'=r_0v'_\theta$ avec . Or $(\vec{e}_\theta,\vec{v}')=\pm\alpha$, et donc $C'=\sqrt{GM_Tr_0}\cos\alpha$. Ni *v* ni *r* ne changent : $E_m'=E_m$

   b) Mouvement elliptique, puisque l'énergie mécanique est négative.

   c) On connaît la constante des aires, ainsi que l'énergie mécanique, on peut donc en déduire les expressions des distances au périgée et à l'apogée.

   Pour ces deux valeurs de *r*, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective $(\dot{r}=0)$.

   $E_m=E_{p,eff}\Leftrightarrow-\frac{GmM_T}{2r_0}=\frac{GmM_Tr_0\cos^2\alpha}{2r^2}-\frac{GmM_Tm}{r}$: $\times2r^2r_0$ et simplification donne $-r^2=r_0^2\cos^2\alpha-2rr_0\Leftrightarrow r^2-2r_0r+r_0^2\cos^2\alpha=0$

   $\Delta=4r_0^2-4r_0^2\cos^2\alpha=4r_0^2\sin^2\alpha=(2r_0\sin\alpha)^2$: les deux racines sont donc $\frac{1}{2}(2r_0\pm2r_0\sin\alpha)$, donc $r_P=r_0(1-\sin\alpha)$, la plus petite, et $r_P=r_0(1+\sin\alpha)$ la plus grande (ou l'inverse si *α* est négatif).

   La contrainte sera respectée si $\sin\alpha\leq0{,}02\Leftrightarrow\alpha\leq0{,}02\,\text{rad}$ (petit angle), soit $\alpha\leq1{,}15°$.

14. Diffusion élastique d'un proton par un noyau

(a) Voir exo précédent

(b) $\vec{F}=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

(c) $\delta W(\vec{F})=-d\,E_p \Leftrightarrow \dfrac{d\,E_p}{dr}=\dfrac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc $E_p=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

(d) $E_m=\dfrac{1}{2}mv_0^2>0$. Le proton suit une branche d'hyperbole dirigée vers les y croissants (force répulsive).

(e) On a $E_m=E_{p,eff}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{mb^2v_0^2}{2r^2}+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. On la multiplie par $\dfrac{2r^2}{mv_0^2}$: $r^2=b^2+\dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2}r$, soit $r^2-2Kr-b^2=0$ avec $K=\dfrac{+Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2}$, donc la seule racine positive est $r_P=\sqrt{K^2+b^2}+K$