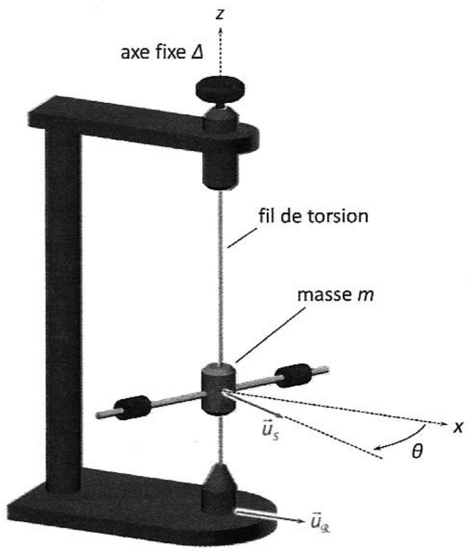
Étude d'un pendule de torsion



(a) On a $J=J_0+2md^2$ car la contribution d'une masse ponctuelle m située à la distance d de l'axe de rotation au moment d'inertie est md^2.

(b) On a $\frac{dL}{dt}=J\ddot{\theta}=-C\theta$, car les frottements sont négligés et car le poids et la réaction du fil sont sur l'axe de rotation, donc de moments nuls.

(c) i - On identifie le carré de la pulsation (pas de la vitesse angulaire attention!) : $\Omega_0^2=\frac{C}{J}$, donc $T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$.

Pour exploiter le tableau, on cherche une relation affine à partir de $T_0^2=\frac{(2\pi)^2}{C}(J_0+2md^2)$: c'est le cas si l'on pose $X=d^2$ et $Y=T_0^2$.

Le coefficient directeur $(Y=aX+b)$ est alors $a=\frac{8\pi^2 m}{C}=4965\,\text{s}^2/\text{m}^2$, ce qui donne $C=\frac{8\pi^2 m}{a}=7{,}95\cdot10^{-4}\,\text{N.m/rad}$, et l'ordonnée à l'origine est $b=\frac{(2\pi)^2}{C}J_0=66{,}43\,\text{s}^2$, donc $J_0=\frac{bC}{(2\pi)^2}=1{,}34\cdot10^{-3}\,\text{kg.m}^2$

ii - On a $\mu=\frac{32\ell C}{\pi\delta^4}=6{,}48\cdot10^{10}\,\text{N/m}^2$ où les N/m^2 (m N.m/m^4) ont la même unité qu'une pression, donc peuvent s'exprimer en pascals Pa.

Toupie

Une petite toupie assimilable à un disque homogène de masse m = 100g, de rayon R = 5 cm, tournant autour de son axe de révolution, est initialement lancé à une vitesse angulaire de 3600 tour par minute. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution (axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan) est $J = mR^2/2$.
Sachant que la toupie s'arrête au bout de 3 minutes sous l'action de frottements équivalents à un couple que l'on supposera de moment constant, calculer :

1) Le moment du couple.
2) L'accélération angulaire au cours du mouvement.
3) Le nombre de tours effectués jusqu'à l'arrêt total de la toupie.

Le moment d'inertie J est connu : $J=\frac{1}{2}\times 0{,}1\,\text{kg}\times(0{,}05\,\text{m})^2=1{,}25\cdot 10^{-4}\,\text{kg.m}^2$, et la toupie subit un moment constant, qui la freine, donc négatif, qu'on note $-\Gamma$.

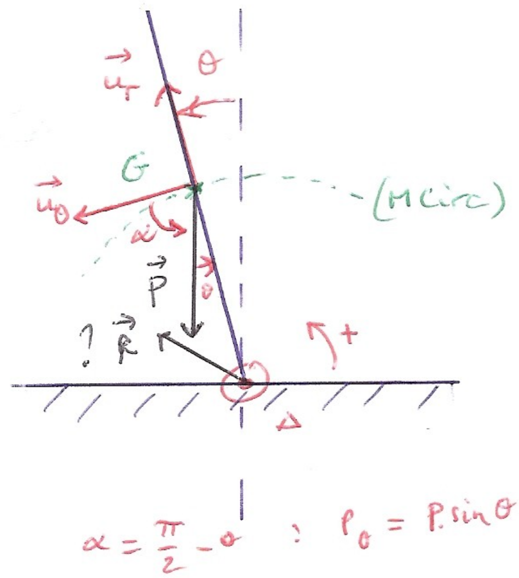
Le TMC donne $\frac{dL}{dt}=J\ddot{\theta}=-\Gamma$, qu'on intègre : $J[\dot{\theta}]_0^t=-\Gamma(t-0)$ soit $J(\dot{\theta}(t)-\dot{\theta}_0)=-\Gamma t$, avec $\dot{\theta}_0=3600\,\text{tr/min}=377\,\text{rad/s}$

En notant $\tau=3\,\text{min}=180\,\text{s}$, on trouve, puisque la toupie s'arrête : $\Gamma=\frac{J\dot{\theta}_0}{\tau}=2{,}62\cdot 10^{-4}\,\text{N.m}$.

On en déduit $\ddot{\theta}=-\frac{\Gamma}{J}=-\frac{\dot{\theta}_0}{\tau}=-1200\,\text{tr/min}^2=-2{,}09\,\text{rad/s}^2$

Pour trouver le nombre de tours, on intègre la loi de la vitesse angulaire : $\dot{\theta}=\dot{\theta}_0-\frac{\Gamma}{J}t$, ce qui donne $\theta=\dot{\theta}_0\tau-\frac{\Gamma}{2J}\tau^2=\frac{\dot{\theta}_0}{2}\tau=5400\,\text{tr}$

Chute d'un arbre



(a) On a $J\ddot{\theta} = M_\Delta(\vec{P})$: on néglige les frottements, et la réaction coupe l'axe. $\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta} = \frac{L}{2} m g \sin\theta$ car $\vec{P}$ s'applique en G.

(b) $L\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3}{2} g \dot{\theta} \sin\theta$, donc $L[\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2]_0^t = \frac{3}{2} g[-\cos\theta(t)]_0^t$.

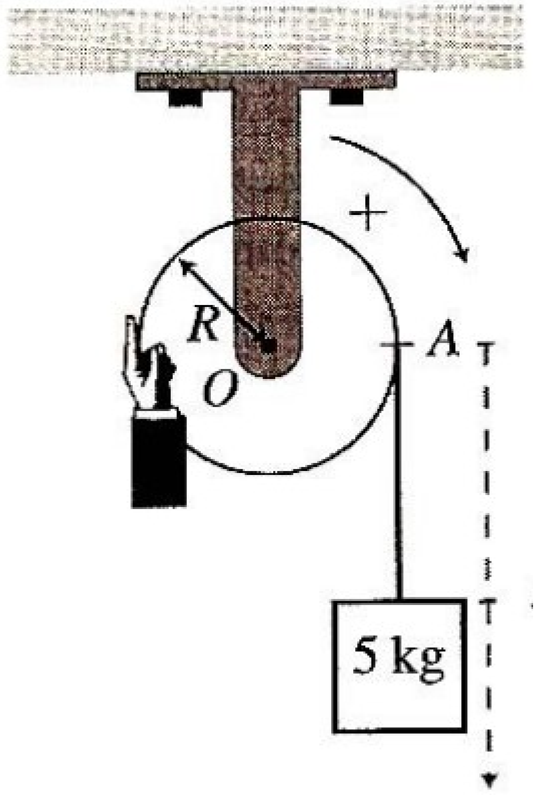
Sans vitesse initiale, cela donne $L(\dot{\theta})^2 = 3g[\cos\theta(0) - \cos\theta(t)]$, ce qui donne bien l'équation demandée, puisque $\dot{\theta} > 0$.

(c) On a $z_G = \frac{L}{2}\cos\theta$, donc l'énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2} J(\dot{\theta})^2 + m g \frac{L}{2}\cos\theta$, qui se conserve, donc $\dot{E}_m = 0$, ce qui donne $\dot{\theta}\left(J\ddot{\theta} - m g \frac{L}{2}\sin\theta\right) = 0$ dont la solution est soit $\dot{\theta} = 0$, soit l'équation de la question (a).

(d) On obtient $\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} dt$, qu'on intègre, **avec les bornes correspondant aux différentielles** : $\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} [t]_0^\tau$, en notant τ le temps de chute.

Donc $\tau = 5{,}1 \sqrt{\frac{L}{3g}} = 5{,}1\,\text{s}$.

Étude d'une poulie



(a) Aspect cinématique

La vitesse du point de la corde est la même que celle du point de la poulie en contact avec elle (condition de non-glissement) : $\dot{x}=R\dot{\theta}$

(b) Aspect statique

Non rigoureux : il est préférable d'appliquer les résultats du (c) en utilisant en plus l'immobilité.

Le moment de la force de l'opérateur doit compenser le moment du poids de la masse et de la corde (la liaison pivot étant idéale, le moment est nul).

Comme la distance à l'axe est la même, on a évidemment $F=mg=50\,\mathrm{N}$

(c) Aspect dynamique

Système : poulie

<u>Contrainte</u> : en rotation

<u>Bdf, moments et couples</u>:

Poids et réaction : sur l'axe, de moments nuls

Tension corde : $M(\vec{T})=RT$, avec le bras de levier.

TMC : $J\ddot{\theta}=RT$

Système : masse m

<u>Contrainte</u> : mouvement vertical

<u>Bdf</u> :

Poids $\vec{P}=m\vec{g}$

Tension corde $\vec{T}\,'$, de même norme T que celle exercée en A sur la poulie

<u>RFD</u> : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{T}\,'$

Proj sur (Ox) : $m\ddot{x}=+mg-T$

2 équations, 3 inconnues, mais la (a) donne $\ddot{x}=R\ddot{\theta}$: on combine en éliminant $\ddot{x}$ et T.

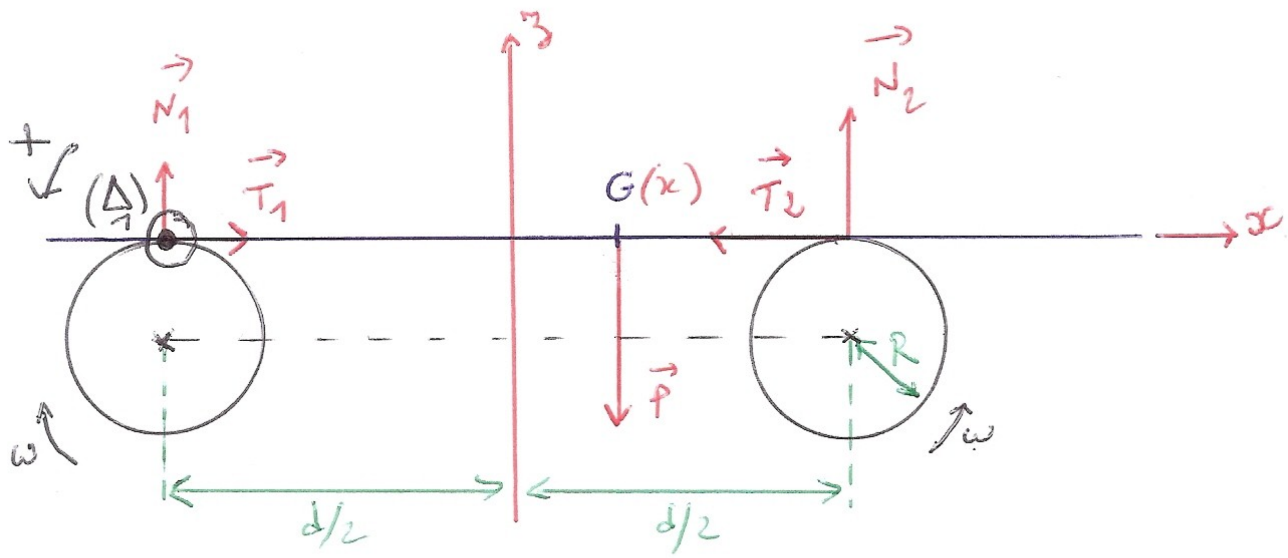
$mR\ddot{\theta}=+mg-\frac{J}{R}\ddot{\theta}$: $\ddot{\theta}=\frac{mgR}{J+mR^2}=\frac{g}{R}\frac{m}{\frac{1}{2}m_P+m}=\frac{g}{R}\frac{1}{\frac{m_P}{2m}+1}$ puis $\ddot{x}=g\frac{mR^2}{J+mR^2}$ et

$T=mg\frac{J}{J+mR^2}$

Expérience de Timochenko

(a) $\vec{T}_1$ pousse la barre vers la droite, puisque le cylindre tourne dans ce sens.

Les réactions normales n'ont pas la même norme : tout dépend de la position de G. On trouve donc :



(b) On prend l'axe (Δ_1) : dans le cas des forces $\vec{N}_1$ et $\vec{T}_1$, le point d'application est sur l'axe ; $\vec{T}_2$ est purement radiale. Ces 3 forces n'ont pas moment.

Il reste le poids : $P_\theta = -P$, $r_G = \dfrac{d}{2} + x$; et $\vec{N}_2$: $N_{2\theta} = +N_2$ s'appliquant à *d* de l'axe.

Comme il n'y a pas de rotation, le moment cinétique est toujours nul.

On en déduit $0 = -mg\left(\dfrac{d}{2} + x\right) + dN_2$ donc $N_2 = mg\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{d}\right)$.

En prenant l'axe de rotation (Δ_2), on obtient de même $0 = +mg\left(\dfrac{d}{2} - x\right) - dN_1$ donc $N_1 = mg\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{d}\right)$

(c) On a $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}$, avec comme contrainte un mouvement horizontal.

i. Projetée sur *z*, on trouve $0 = -P + N_1 + N_2$, ce qui est bien vérifié en remplaçant les réactions normales.

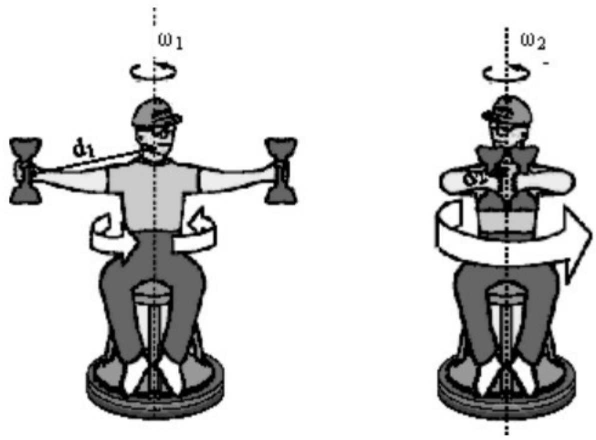
ii. Projetée sur *z*, on trouve $m\ddot{x} = T_1 - T_2$, et en utilisant la loi de Coulomb avec glissement $T = fN$, on a $m\ddot{x} = -2fm\dfrac{g}{d}x$, qui est bien une équadiff harmonique (sans dérivée première) correspondant à des oscillations non amorties.

(d) On identifie $\omega_0^2 = 2f\dfrac{g}{d}$. Par ailleurs, on mesure facilement la période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$: on détermine *f* en combinant ces expressions : $f = 2\dfrac{d}{g}\left(\dfrac{\pi}{T_0}\right)^2$

Système Terre – Lune

	A	B	C	D	E	F
1	Rt	6,40E+006		G	6,67E-11	
2	Mt	6,00E+024				
3	Jt	8,11008E+37				
4						
5	D	3,84E+008				
6	ML	7,35E+022				
7						
8	T	86160	23h56	vL	1020,8758495	V(G MT / D)
9	ωT	7,292462E-05		ωL	2,658531E-06	VL / D
10	LT	5,91425E+33	Jt ωT	LL	2,88132E+34	ML D² ωL
11						
12	T'	82800				
13	ωT'	7,588388E-05				
14	LT'	6,15424E+33		LL'	2,85732E+34	
15				D'	377629617,82	m
16					377629,61782	km
17		D'	LL'²/(G ML² MT)			
18						

Système déformable : tabouret d'inertie



1. On multiplie la RFD orthoradiale par r , avec $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ d'une façon générale et on constate que $m_i r_i a_{\theta i} = \frac{d}{dt}(m_i r_i^2 \dot{\theta}_i)$ en calculant la dérivée; du côté droit de l'équation apparaît $\sum r_i F_{\theta/M_i}$, donc la somme des moments des forces.
2. Comme dans le cours, les moments des forces intérieures s'en vont, et il ne reste que les moments des forces extérieures.
3. Si et seulement si, pour tous les points M_i , $\dot{\theta}_i$ est la même, notée ω, on aura alors $L_\Delta = J_\Delta \omega$.
4. On a pour le système déformable : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F})$ où l'on ne considère que les forces extérieures.

   Comme on néglige tous les frottements, il reste le poids $\vec{P}$ du système et la réaction du sol, normale $\vec{R_N}$: toutes les deux sont verticales, donc parallèles à l'axe de rotation.

   Leur moment est donc nul et $\frac{dL_\Delta}{dt} = 0$, donc L_Δ est une constante.
5. Comme tous les points du système tournent à la même vitesse angulaire ω_1 à l'état initial, et à la même vitesse angulaire ω_2 à l'état final (mais pas pendant la déformation), on a $L_\Delta = J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$.

   Entre l'état initial et l'état final, la masse est restée constante, mais pas sa distribution dans l'espace : elle s'est rapprochée de l'axe de rotation.

   Comme $J = \sum_i m_i r_i^2$, avec r_i qui a diminué, on a $J_1 > J_2$, donc puisque $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2} > 1.$
6. On a $E_{m,1} = E_{c,1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$, et de même $E_{m,2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$, donc $\frac{E_{m,2}}{E_{m,1}} = \frac{J_2 \omega_2 \omega_2}{J_1 \omega_1 \omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ et $\frac{E_{m,2}}{E_{m,1}} = \frac{J_1}{J_2}$
7. On voit $\frac{E_{m,2}}{E_{m,1}} = \frac{J_1}{J_2} > 1$ donc $\Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} > 0$: il y a un travail de forces non conservatives qui est positif.

   La seule origine possible est le travail musculaire fourni par l'homme, c'est un travail des forces intérieures au système (équivalent en translation : skieur qui pousse sur les bâtons pour arriver à $z_{\text{final}} > z_{\text{initial}}$)

   $\Delta E_m = W_{\text{int,NC}} = E_{m,2} - E_{m,1} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$ soit, puisque $J_2 \omega_2 = J_1 \omega_1$: $W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1 (\omega_2 - \omega_1)$.

Étude d'un embrayage

Un embrayage est modélisé par deux disques de moments d'inertie respectifs J_1 et J_2 par rapport à leur axe de rotation commun Δ. On les étudie en l'absence de tout moment extérieur, le premier étant lancé à la vitesse angulaire Ω tandis que le second est immobile. La mise en contact entre les surfaces des disques conduit à un couple de frottement qui disparait quand leurs vitesses angulaires sont égales à ω, figure 9.

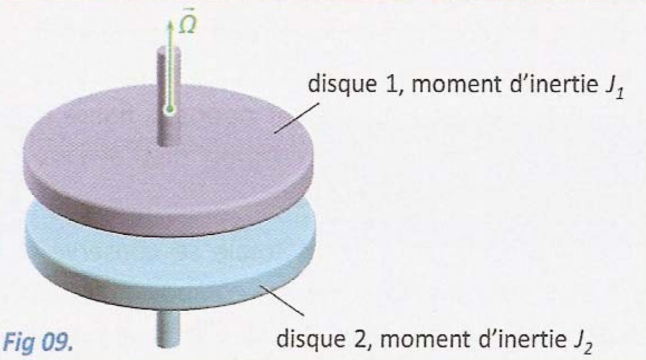


Fig 09.

1. Exprimer la vitesse angulaire finale ω.

2. Calculer le travail du couple de frottement pendant la phase de couplage des disques. Dépend-il du type de frottement mis en jeu ?

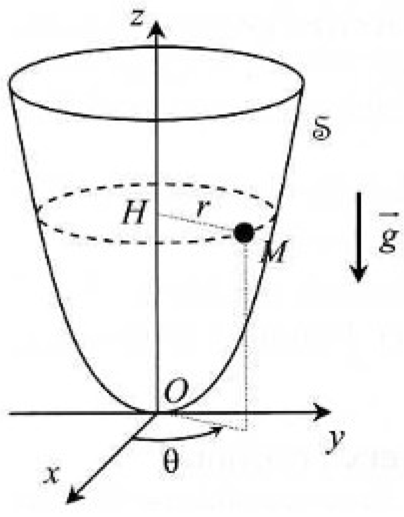
1. On prend comme système la réunion des deux disques, le moment cinétique étant additif : $L_\Delta = J_1\omega_1 + J_2\omega_2$ d'une façon générale.

   Comme il n'y a aucun moment extérieur, le moment cinétique se conserve : on l'égalise entre l'état initial et l'état final : $L_\Delta = J_1\Omega + J_2 0 = J_1\omega + J_2\omega$, donc $\omega = \frac{J_1}{J_1+J_2}\Omega$.

2. On applique le TEM : $\Delta E_m = W_{\text{int,NC}} = E_{m,2} - E_{m,1} = \frac{1}{2}J_2\omega^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 - \frac{1}{2}J_1\Omega^2$, donc

   $W_{\text{frott}} = \frac{1}{2}(J_1+J_2)\frac{J_1^2}{(J_1+J_2)^2}\Omega^2 - \frac{1}{2}J_1\Omega^2$ soit $W_{\text{frott}} = -\frac{J_1 J_2}{2(J_1+J_2)}\Omega^2$, indépendant de la nature des frottements en jeu (fluides ou solides).

Bille sur une cuvette parabolique



(a) Constante L du mouvement

On a $m a_\theta = m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=\sum F_\theta$, avec $\vec{P}$ verticale, donc parallèle à l'axe z, et $\vec{R}$ dans le plan (OHM), donc de coordonnée orthoradiale nulle : $a_\theta=0$

Par ailleurs $\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=m(r^2\ddot{\theta}+2\dot{r}r\dot{\theta})=m r a_\theta=0$

(b) Énergie

i. On a $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+4\frac{r^2}{a^2}\right)+r^2\dot{\theta}^2\right]$ car $\dot{z}=\frac{2r\dot{r}}{a}$.

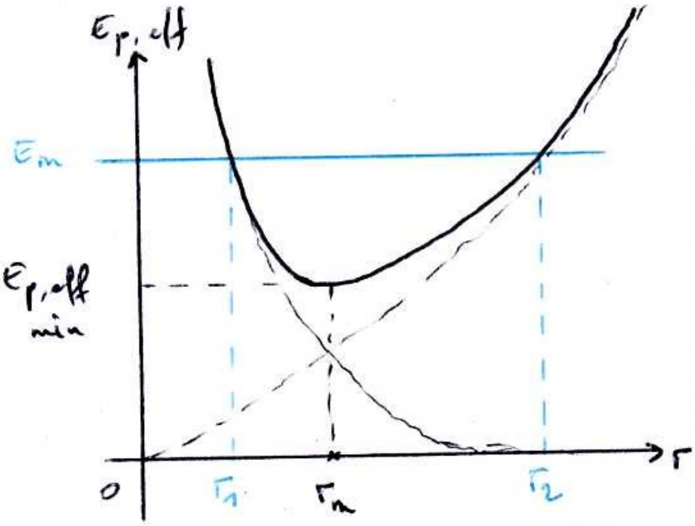
ii. La réaction ne travaille pas, et le poids est une force conservative : l'énergie potentielle est celle de pesanteur $E_p=mgz=\frac{mg}{a}r^2$.

iii. Il n'y a pas de force non conservatives (pas de frottements) : l'énergie mécanique se conserve.

(c) Discussion générale du mouvement

i. On a $\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$ donc $\dot{\theta}^2=\frac{L^2}{m^2r^4}$ et $r^2\dot{\theta}^2=\frac{L^2}{m^2r^2}$: on trouve bien $\frac{1}{2}m\dot{r}^2G(r)+E_{p,eff}(r)=E_m$ avec $G(r)=1+4\frac{r^2}{a^2}$ et $E_{p,eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{mg}{a}r^2$.

ii. Fonction en 1/r² + parabole :



iii. On trace la droite horizontale correspondant à E_m qui coupe toujours la courbe de $E_{p,eff}(r)$ en deux points d'abscisse r_1 et r_2 car $\lim_0 E_{p,eff}(r)=+\infty$, $\lim_\infty E_{p,eff}(r)=+\infty$ et $E_{p,eff}$ ne présente qu'un minimum.
Les valeurs de r hors de $[r_1,r_2]$ sont interdites car elles correspondraient à $E_{p,eff}>E_m$ soit $\frac{1}{2}m\dot{r}^2G(r)<0$, ce qui est impossible car $G(r)>0$.

r_1 et r_2 sont solutions de l'équation $E_m=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{mg}{a}r^2$ soit, en explicitant avec les conditions initiales : $\frac{1}{2}m\dot{r}_0^2\left(1+4\frac{r_0^2}{a^2}\right)+\frac{mr_0^2\dot{\theta}_0^2}{2}+\frac{mg}{a}r_0^2=\frac{mr_0^4\dot{\theta}_0^2}{2r^2}+\frac{mg}{a}r^2$.