TD 20 Correction – LOI DES GAZ PARFAITS (ET ÉCARTS), MODÈLE CINÉTIQUE

1. Plongée sous-marine

a) La pression augmente d'un bar par 10 m de profondeur, donc $P_\beta = 5\,\text{bars}$.

b) Bilan de quantité :

Bouteille : $n_I = \dfrac{PV}{RT}$ (état initial), $n_F = \dfrac{P_\beta V}{RT}$ (état final)

Air inspiré : $n_P = \dfrac{P_\beta v}{RT}$

qui est prélevé dans la bouteille, donc $n_F = n_I - k\,n_P$, où k est le nombre d'inspirations.

On trouve : $k = \left(\dfrac{P}{P_\beta} - 1\right)\dfrac{V}{v} = 590$

2. Pompe à vélo

Une chambre à air de roue de vélo, de volume constant $V = 500\,\text{cm}^3$ est complètement dégonflée.

Une pompe à vélo est un système qui récupère un volume d'air $v = 100\,\text{cm}^3$ à la pression atmosphérique $P_0 = 1{,}013\,\text{bar}$, et l'envoie dans la chambre à air.

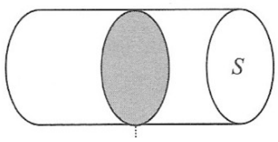
On suppose que le gonflage est suffisamment lent pour que la température reste toujours égale à la température atmosphérique.

Combien faut-il de coups de pompe pour atteindre la pression $P_1 = 1{,}800\,\text{bar}$?

V	500	nF	'P0 V / R T
v	100	nI	'P1 V / R T
P0	1,013	nP	'P0 v / R T
P1	1,8	k	3,884501481

3. Paroi mobile

1.



Réf : Terre, galiléenne   Système : paroi (piston) ; masse m

Contrainte : immobilité   BdF : Poids, réaction normale, forces de pression

RFD : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{\text{pG}} + \vec{F}_{\text{pD}}$

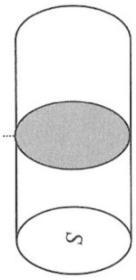
Projections : axe vertical z vers le haut, axe horizontal x, vers la droite

On a $\vec{P} = -P\vec{u}_z$, $\vec{R}_N = +R_N\vec{u}_z$, $\vec{F}_{\text{pG}} = +p_{\text{G}}\vec{u}_x$, $\vec{F}_{\text{pD}} = -p_{\text{D}}S\vec{u}_x$

(pressions à gauche et à droite, « petits p » pour distinguer du poids, vecteurs unitaires du gaz vers le système).

Donc $P = R_N$ et $\boxed{p_{\text{G}} = p_{\text{D}}}$

Résultat **à retenir** qu'on appliquera maintenant sans démonstration dans ce cas.

2. 

Mêmes référentiel, système, contrainte.

BdF : poids, forces de pression

RFD : $\vec{0}=\vec{P}+\vec{F}_{\text{pB}}+\vec{F}_{\text{pH}}$ (exercées par le gaz situé en bas, en haut)

Projection : axe z vers le haut donc $0=-mg+p_{\text{B}}S-p_{\text{H}}S$

Donc $\boxed{p_{\text{B}}=p_{\text{H}}+\dfrac{mg}{S}}$: à redémontrer à chaque fois dans cette situation en revanche...

4. Étude d'une pompe

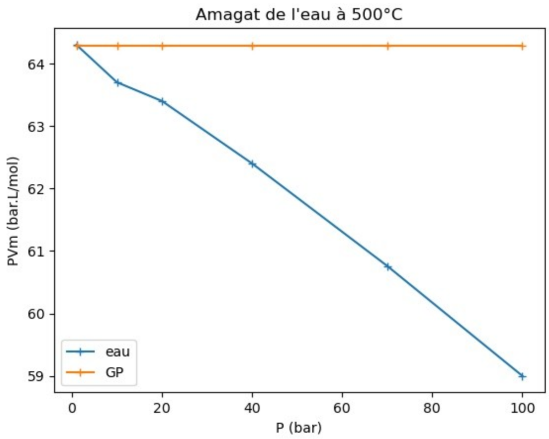
1. La quantité de matière se conserve, puisque les gaz ne s'échappent pas dans l'atmosphère.
   À l'état initial, on a $n=\dfrac{P_0(2V)}{RT_0}$, et à la fin de l'étape *n*, où le volume du cylindre est encore nul, on a $n=\dfrac{P_n^gV+P_n^dV}{RT_0}$. On en déduit $\boxed{P_n^g+P_n^d=2P_0}$.
2. État initial : S_1 fermée (piston haut) : pression à gauche P_{n-1}^g , volume V
   État final : S_1 ouverte (piston bas) : pression à gauche P_n^g , volume $V+v$. En effet, le gaz du cylindre est envoyé ensuite à droite, avec S_1 fermée : la pression du gaz à gauche n'est pas modifié lors de la remontée du piston.

   De plus, lors de la descente, tout le gaz à gauche emplit le réservoir et le cylindre, donc la quantité de matière se conserve lors de la descente du piston : $\dfrac{P_{n-1}^gV}{RT_0}=\dfrac{P_n^g(V+v)}{RT_0}$ soit $\boxed{P_n^g=\dfrac{V}{V+v}P_{n-1}^g}$.

   P_n^g est donc une suite géométrique de premier terme $P_0^g=P_0$ et de raison $\dfrac{V}{V+v}$: on en déduit $\boxed{P_n^g=\left(\dfrac{V}{V+v}\right)^nP_0}$ qui tend vers 0, et donc $\boxed{P_n^d=\left[2-\left(\dfrac{V}{V+v}\right)^n\right]P_0}$ qui tend vers $2P_0$.

5. Diagramme d'Amagat

```
import pylab as pt
from math import *

R=8.314
T=500+273.15


Pbars=[1,10,20,40,70,100]
VolmLmols=[64.3,6.37,3.17,1.56,0.868,0.59]
N=len(Pbars)
PVms=[0]*N
# /1e5 et /1e-3 pour avoir des bar.L
PVmsGP=[R*T/100]*N

for i in range(N):
    PVms[i]=Pbars[i]*VolmLmols[i]


pt.plot(Pbars,PVms,'+-',label='eau')
pt.plot(Pbars,PVmsGP,'+-',label='GP')
pt.xlabel("P (bar)")
pt.ylabel("PVm (bar.L/mol)")
pt.legend()
pt.title("""Amagat de l'eau à 500°C""")

pt.show()

# en L/mol
i=2
penteMax=(PVms[i]-PVmsGP[i])/(Pbars[i]-Pbars[0])
i=1
penteMin=(PVms[i]-PVmsGP[i])/(Pbars[i]-Pbars[0])

a=0.923 # uSi
# pentes en m3/mol
bMax=penteMax*1e-3+a/(R*T)
bMin=penteMin*1e-3+a/(R*T)

Na=6.02e23
# b=4π/3 r**3 Na
rMax=(3*bMax/(4*pi*Na))**(1/3)
rMin=(3*bMin/(4*pi*Na))**(1/3)

print ("Rayon estimé molécs : min ", rMin, " ; max ",
rMax)
```




```
Rayon estimé molécs : min  3.15485096196
27303e-10  ; max  3.3790677938349686e-10
```

6. Isothermes de Van der Waals $\left(P+a\frac{n^2}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$

1. b est en $\mathrm{m^3/mol}$ de façon évidente, et $[P]=[a]N^2L^{-6}$, avec $[P]=[force].L^{-2}=M.L.T^{-2}.L^{-2}$ donc $[a]=M.L^5.T^{-2}.N^{-2}$: en $\mathrm{kg.m^5/s^2.mol^2}$
2. $P(V)=\frac{nRT}{V-nb}-a\frac{n^2}{V^2}$, donc $P'(V)=-\frac{nRT}{(V-nb)^2}+2a\frac{n^2}{V^3}$ puis $P''(V)=2\frac{nRT}{(V-nb)^3}-6a\frac{n^2}{V^4}$
3. On en déduit le système : $\begin{cases} RTV^3=2an(V-nb)^2 \\ RTV^4=3an(V-nb)^3 \end{cases}$.
4. Le rapport donne $V=\frac{3}{2}(V-nb)\Leftrightarrow V=V_C=3nb$, qu'on remplace dans la 1ère équation

   $RT(3nb)^3=2an(3nb-nb)^2$: $RT27n^3b^3=2an(4n^2b^2)$, donc $T=T_C=\frac{8a}{27Rb}$.

   On remplace dans l'équation d'état : $P(V)=\frac{nR.8a}{2nb.27Rb}-a\frac{n^2}{9n^2b^2}$, donc $P=P_C=\frac{a}{27b^2}$
5. On calcule : $\left(\pi\frac{a}{27b^2}+a\frac{n^2}{(\beta.3nb)^2}\right)(\beta.3nb-nb)=nR\tau\frac{8a}{27Rb}$, qui donne bien l'équation demandée en la multipliant par $\frac{27b}{na}$.
6. $\left(\pi+\frac{3}{\beta^2}\right)(3\beta-1)=8\tau$: $\pi=\frac{8\tau}{3\beta-1}-\frac{3}{\beta^2}$, qui n'est défini que si $\beta>\frac{1}{3}$.

7. Le néon

1. On ne doit pas utiliser le modèle de la pression cinétique ici, puisque on n'en parle qu'à la question 2...

   Il s'agit de la version microscopique de la loi des gaz parfaits : $PV=nRT=\frac{NRT}{N_A}$, avec par définition $n^*=\frac{N}{V}$ donc $P=\frac{n^*RT}{N_A}=n^*k_BT=5{,}0\cdot10^4\,\mathrm{Pa}=0{,}50\,\mathrm{bar}$
2. $u=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=583\,\mathrm{m/s}$

8. Atmosphère des planètes

1. On a $E_m=0=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_T}{R_T}$ donc $v_{2l}=\sqrt{\frac{4GM_T}{D_T}}=11{,}2\,\mathrm{km/s}$ dans le cas de la Terre.
   Idem pour les autres planètes : Mercure : 4,24 ; Vénus : 10,4 ; Mars : 5,01 – en km/s.
   D'après le cours, on a $\boxed{u=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}}$. AN : $u(H_2)=1{,}9\,\mathrm{km/s}$, $u(N_2)=0{,}52\,\mathrm{km/s}$.
2. L'hydrogène s'échappe de toutes les planètes.
   Le diazote est retenu par les atmosphères de la Terre et de Vénus, s'échappe de Mercure

(d'autant plus que la température y est très élevée), et c'est limite dans le cas de Mars (et la température est en moyenne très inférieure à 300K).

3. On devrait avoir $T'=\frac{\mathrm{M(N_2)}}{3R}\left(\frac{v_l}{10}\right)^2$ soit $T'=1411\,K=1\,138\,°\mathrm{C}$!!

9. Effusion gazeuse

a) $n^*=\frac{N}{V}=\frac{nN_A}{V}$

b) Exactement comme le cours : $\delta N=\frac{1}{6}n^*(s.u\,dt)$

c) La variation de N est une diminution ici, égale à δN, donc $dN=-\delta N$

$N_A dn=-\frac{nN_A}{6V}su\,dt$: $\frac{6V}{su}\dot{n}+n=0$

d) On en déduit $\tau=\frac{6V}{su}$

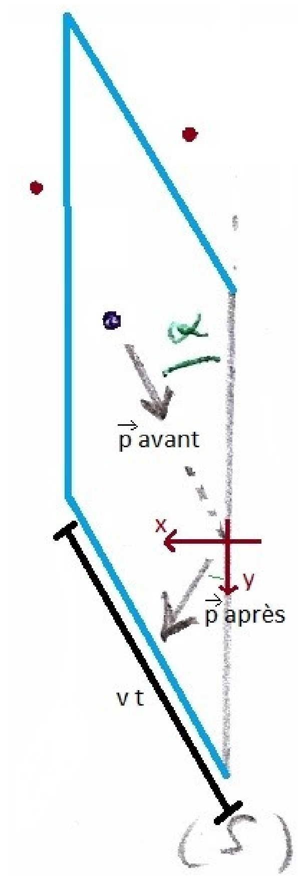
e) $V=1\,\mathrm{L}=10^{-3}\mathrm{m}^3$ et $u\approx 500\,\mathrm{m/s}$. Pour que le débit soit lent, de telle sorte que n^* reste bien uniforme dans le récipient, une constante de temps τ (rappel : c'est la durée nécessaire pour que n soit divisée par e) de l'ordre de $\tau=10\,\mathrm{s}$ semble un minimum.

$s=\frac{6V}{\tau u}$. En ordre de grandeur, on assimile 5 à 6 : $s\approx 10^{-3-1-2}\mathrm{m}^2=10^{-6}\mathrm{m}^2$.

Donc $d\approx 10^{-3}\mathrm{m}=1\,\mathrm{mm}$, diamètre du trou ou côté d'un trou carré.

10. Pression cinétique de la pluie

1. Les gouttes qui vont frapper la fenêtre sont celles contenues dans le cylindre de base la fenêtre, dont les droites génératrices s'appuient sur les bords de la fenêtre, et sont dans la direction du mouvement des gouttes. La hauteur de ce cylindre est donc $H=v\tau\sin\alpha$, son volume est $V=HS$ et le nombre de gouttes est donc $N=n^*V=n^*Sv\tau\sin\alpha=1\,600$



2. Définissons les vecteur unitaires : $\vec{u}_x$ perpendiculaire à la fenêtre, vers l'extérieur, $\vec{u}_y$ vertical vers le bas.
Chaque goutte transporte la quantité de mouvement $\vec{p}=m\vec{v}=-mv\sin\alpha\vec{u}_x+mv\cos\alpha\vec{u}_y$ avant le choc et $\vec{p}'=m\vec{v}'=+mv\sin\alpha\vec{u}_x+mv\cos\alpha\vec{u}_y$ après : sa quantité de mouvement a donc varié de $\Delta\vec{p}=2mv\sin\alpha\vec{u}_x$.
Celle de l'ensemble des gouttes a donc varié de $\Delta\vec{P}=N\Delta\vec{p}=2mn^*v^2\tau S\sin^2\alpha\vec{u}_x$: elles ont subies de la part de la fenêtre la force $\vec{F}_{\text{fenêtre/gouttes}}=\frac{\Delta\vec{P}}{\tau}=2mn^*v^2S\sin^2\alpha\vec{u}_x$.
D'après la troisième loi de Newton $\vec{F}_P=\vec{F}_{\text{gouttes/fenêtre}}=-\vec{F}_{\text{fenêtre/gouttes}}=-2mn^*v^2S\sin^2\alpha\vec{u}_x$ soit
$F_P=0{,}32\,\mathrm{N}$ et $P_{\text{cin}}=\frac{F_P}{S}=0{,}16\,\mathrm{Pa}$, très inférieure à la pression atmosphérique, mais exercée d'un seul côté.