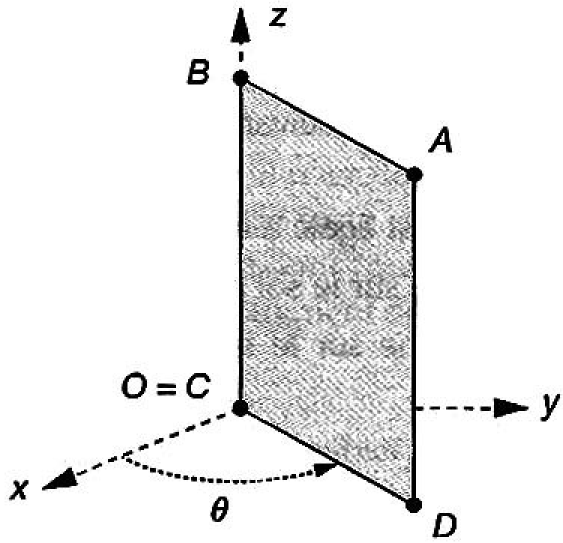
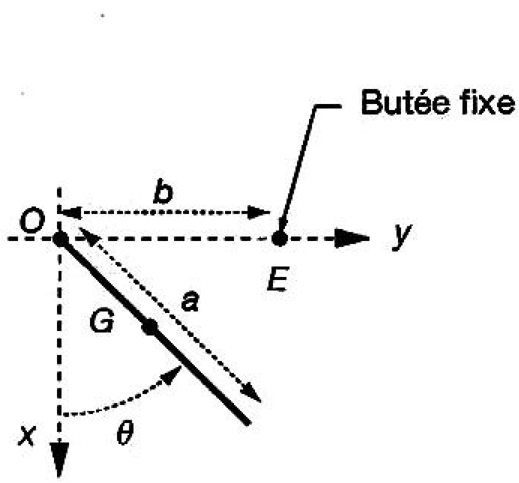
I-A/ Ouverture de la porte





1. Il n'y a aucun couple ni aucun moment : la réaction s'applique sur l'axe et la droite d'application du poids est parallèle à l'axe.
   Le TMC implique donc que la vitesse angulaire se conserve : $\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$, que l'on intègre par rapport au temps : $\theta(t)=\dot{\theta}_0 t+\theta_0=\dot{\theta}_0 t$.
   On obtient donc $\tau=\dfrac{\pi}{2\dot{\theta}_0}$.

2. a) Contrainte : G en mouvement circulaire
   BdF : Poids $\vec{P}$, réaction de l'axe $\vec{R}$, réaction de la butée $\vec{F}=+F\,\vec{u}_x$
   RFD : $m\vec{\gamma}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}$
   En notant $\vec{OG}=r\,\vec{e}_r$, avec $r=\dfrac{a}{2}$, constante, on trouve $\vec{v}_G=r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, puis $\vec{a}_G=\vec{\gamma}=-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r+r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$
   En projetant sur $\hat{\theta}$, on obtient $m\dfrac{a}{2}\ddot{\theta}=-F+R_\theta$, car $+\vec{u}_x=-\vec{e}_\theta$ à l'instant du choc.
   b) On applique le TMC par rapport à l'axe, où le seul moment non nul est celui de la force $\vec{F}$, dont le point d'application est à la distance b de l'axe.
   D'après l'expression du moment d'inertie et celle du moment en coordonnées cylindropolaires, on trouve $\dfrac{1}{3}m\,a^2\ddot{\theta}=-b\,F$
   c) On en déduit $\ddot{\theta}=-\dfrac{3\,b\,F}{m\,a^2}$ donc $R_\theta=F\left(1-\dfrac{3\,b}{2\,a}\right)$
   d) F est directement proportionnelle à $\ddot{\theta}$ d'après la question 2b, et l'accélération angulaire prend des valeurs très élevées pendant le choc puisque $\dot{\theta}$ varie très brutalement.
   Si R_θ est grande, puisque d'après les actions réciproques, l'axe subit la force opposée, donc de même valeur, il y a un risque que la porte se dégonde.
   Il n'y a pas ce risque avec la butée qui subit la force certes très élevée $-\vec{F}$: celle-ci est bien vissée au sol.
   Pour annuler cette composante orthoradiale de la réaction, il faut donc placer la butée à la distance $b=\dfrac{2}{3}a$ de l'axe.
   e) Par projection de la RFD sur $\hat{r}$, on obtient $-m\dfrac{a}{2}\dot{\theta}^2=R_r$, qui conserve une valeur raisonnable, même pendant le choc, puisque $\dot{\theta}$ reste comprise entre $\pm\dot{\theta}_0$.

I-B/ Jeu avec un œuf dur

Remarque : noter a le demi petit axe et b le demi grand axe n'est pas l'idée du siècle… On fait avec !

Q37. Il y a dans l'énergie mécanique de l'œuf : celle, cinétique, de rotation : $\frac{1}{2}J\,\omega^2$ ainsi que l'énergie potentielle de pesanteur $m\,g\,z_G$.

Donc $E_{mH}=\frac{1}{10}m(a^2+b^2)\Omega^2+m\,g\,a$ et $E_{mV}=\frac{1}{5}m a^2\,\Omega^2+m\,g\,b$

Q38. On doit résoudre $E_{mV}<E_{mH}$: $2a^2\Omega^2+10g\,b<(a^2+b^2)\Omega^2+10\,g\,a$ soit $(b^2-a^2)\Omega^2>10g(b-a)$ donc $\Omega>\Omega_c$ avec $\Omega_c=\sqrt{10\frac{g}{b+a}}$.

Q39. Conversion des longueurs en mètres indispensable, qui donne $\Omega_c=44{,}7\,\text{rad/s}=7{,}12\text{ tr/s}$, ce qui est cohérent avec le Document 4 (« plus d'une dizaine de tours par seconde »), car il faut faire tourner l'œuf un peu plus vite pour lutter contre les frottements.

Q40. On remplace : $E_{mH}=\frac{1}{10}m(a^2+b^2)\Omega_0^2+m\,g\,a=\frac{1}{10}m(a^2+b^2)(\Omega_C+\varepsilon)^2+m\,g\,a$, donc au premier ordre :

$E_{mH}=\frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_C^2+2\,\Omega_C\,\varepsilon)+m\,g\,a$, où l'on néglige évidemment le terme en ε^2.

De même à l'état final : $E_{mV}=\frac{m}{5}a^2(\Omega_C^2+2\,\Omega_C r\,\varepsilon)+m\,g\,b$.

Q41. Les énergies mécaniques restent égales, ce qui donne une équation de degré 1 en ε : $P(\varepsilon)=0$. Le terme constant du polynôme P est nécessairement nul, puisque les énergies mécaniques étaient égales pour $\varepsilon=0\Leftrightarrow\Omega=\Omega_C$.

On doit donc avoir l'équation suivante, correspondant à la nullité du coefficient linéaire :

$\frac{m}{10}(a^2+b^2)2\,\Omega_C=\frac{m}{5}a^2\,2\,\Omega_C\,r$ donc $r=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$.

Le demi grand axe b étant supérieur au demi petit axe a, r est donc supérieur à 1 : $\Omega_f>\Omega_0$, l'œuf accélère lors de sa montée, pour une vitesse angulaire légèrement supérieure à la vitesse angulaire critique.

On trouve $r=1$ lorsque $b=a$, ce qui est évident car l'œuf serait alors une boule : il n'y aurait alors aucune différence entre les deux situations et la vitesse angulaire ne pourrait pas changer.

Q42. Le moment cinétique initial s'écrit $L_H=J_H\,\Omega_0=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)(\Omega_C+\varepsilon)$ et celui à l'état final est $L_V=\frac{2}{5}m\,a^2(\Omega_C+r\,\varepsilon)$, donc, à l'ordre 1, $\frac{5}{m}\Delta L=2a^2\,\Omega_C-(a^2+b^2)\,\Omega_C+2\,a^2\,r\,\varepsilon-(a^2+b^2)\,\varepsilon$:

$\frac{5}{m}\Delta L=(a^2-b^2)\Omega_C+[2\,a^2 r-(a^2+b^2)]\varepsilon$, où le terme en ε s'annule d'après la valeur obtenue pour r à la Q41.

On en déduit $\Delta L=\frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_C$. b étant supérieur à a, cette expression est négative : l'œuf a perdu du moment cinétique lors du redressement.

Q43. Le théorème du moment cinétique donne alors $\frac{dL}{dt}\approx\frac{\Delta L}{\Delta t}=C_z$ donc $C_z\approx\frac{m(a^2-b^2)\Omega_C}{5\,\Delta t}$ où il faut avoir Ω_C au dénominateur : on multiplie en haut et en bas par Ω_C.

Donc $C_z\approx\frac{m(a^2-b^2)}{5\,\Omega_C\,\Delta t}\times10\frac{g}{a+b}$ d'après la Q38, ce qui donne bien le résultat demandé puisque $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$.

Le calcul n'est pas si artificiel que cela, puisqu'on fait ainsi apparaître $\Omega_C\,\Delta t$, angle total parcouru (nombre de tours) pendant la phase de montée.

Q44. Ces forces s'appliquent sur l'axe de rotation, donc n'ont pas de moment. D'après l'énoncé, ce couple est nécessaire à l'expérience, il faut donc que la liaison ne soit pas idéale, d'où la nécessité d'une surface « pas trop lisse » d'après le Document 4 (frottements).

Remarques : l'énoncé est très bien guidé, mais l'étude est très simplifiée : rien ne garantit que la vitesse angulaire reste inchangée après la montée, même à la limite basse $\Omega_0=\Omega_C$.

Par ailleurs, le travail total du couple obtenu à la fin est $W(C_z)\approx P(C_z)\,\Delta t=C_z\,\Omega_C\,\Delta t=2\,mg(a-b)$, soit tout de même 2 fois le travail du poids !! l'énergie mécanique est loin de se conserver…

Avec un raisonnement itératif, où l'on réinjecte cette valeur dans $E_{mV}=E_{mH}+W(C_z)$, on obtient un facteur $\sqrt{3}$ en plus dans l'expression de Ω_C, ce qui donne $\Omega_c=12{,}3\,\text{tr/s}$, un peu plus proche de la description du Document 4…

II-A/ Étude de la comète Churry

1. cf cours, par exemple avec l'accélération en fonction de la vitesse.

   On trouve $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$, uniforme ; sachant qu'il faut une période pour parcourir le périmètre du cercle : $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\frac{2\pi R}{T}$ qu'on élève au carré pour obtenir $\frac{GM}{R}=\frac{(2\pi)^2R^2}{T^2}$ soit $\frac{T^2}{R^3}=\frac{(2\pi)^2}{GM}$.

   On en déduit $T_C=\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{GM}a_C^3}$, ou éventuellement $T_C=\sqrt{\frac{(2\pi a_C)^3}{2\pi GM}}=\sqrt{\frac{(33\text{E}11)^3}{2\pi\times 6{,}7\text{E-}11\times 2\text{E}30}}=2{,}1\text{E}11\,\text{s}=6{,}2\,\text{ans}$

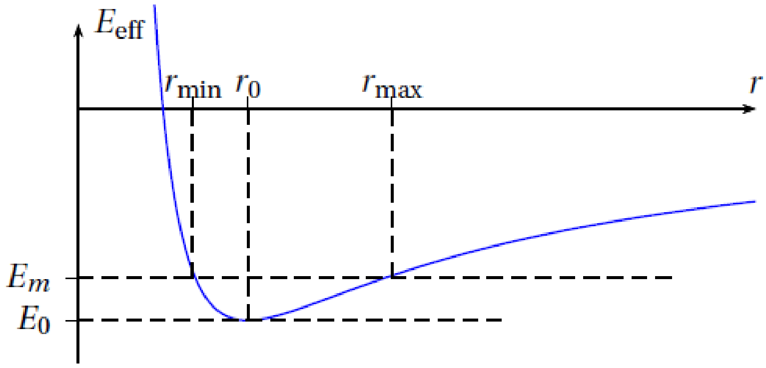
2. On a par définition $\vec{\sigma}_S=m\vec{r}\wedge\vec{v}$ qui reste constant car $\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{0}$, la force gravitationnelle étant centrale.

   Donc $\forall t\ \ \vec{r}=\vec{OM}\perp\vec{\sigma}_S$: M appartient au plan passant par O, de vecteur normal $\vec{\sigma}_S$.

   En coordonnées polaires, on a $\vec{r}=r\vec{e}_r$, donc par dérivation $\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, ce qui donne $\vec{\sigma}_S=mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, donc $C=r^2\dot{\theta}$.

3. On a $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+m\frac{C^2}{2r^2}-m\frac{GM}{r}$ en remplaçant $\dot{\theta}$.

   Voir cours pour l'allure de la courbe (à justifier). La vitesse radiale $\dot{r}$ s'annule aux extrema :



4. r_0 est l'abscisse du minimum de la courbe donc $E'_{\text{eff}}(r_0)=0$: $-m\frac{C^2}{r_0^3}+m\frac{GM}{r_0^2}=0$ donc (en multipliant par r_0^3) : $r_0=\frac{C^2}{GM}$. En remplaçant dans $E_{\text{eff}}(r_0)=E_0$, on obtient $E_0=-m\frac{G^2M^2}{2C^2}=-\frac{GMm}{2r_0}$.

   On a pour la comète $E_p(r_0)=-m\frac{GM}{r_0}$ soit $E_p(r_0)=-m\frac{G^2M^2}{C^2}$. Si l'on suppose la trajectoire circulaire (pas si clair dans l'énoncé), alors $\dot{r}=0\ \ \forall t$, et $E_c(r_0)=m\frac{C^2}{2r_0^2}=m\frac{G^2M^2}{2C^2}$, donc $E_p(r_0)=-2E_c(r_0)$.

   <u>Note</u> : Si le mouvement n'est plus considéré comme circulaire, on ne peut pas déterminer $E_c(r_0)$ sans connaître E_m car $\dot{r}_0$ est alors non nul… et on peut avoir E_m quelconque à C donnée.

5. Ce sont les distances vérifiant l'équation $E_m=E_{\text{eff}}(r)$: $2r^2E_m=mC^2-2mGMr$ soit $2r^2E_m+2mGMr-mC^2=0$ dont la somme des racines est $r_{\text{min}}+r_{\text{max}}=2a=-\frac{2mGM}{2E_m}$, d'où l'on tire $E_m=-\frac{GMm}{2a}$, qu'il ne faut surtout pas remplacer pour répondre à la fin de la question ! (on demande une relation en fonction de E_m).

   On a alors le discriminant $\Delta=(2mGM)^2+8E_mmC^2=4m(mG^2M^2+2E_mC^2)$, qui est nécessairement positif puisque $E_m>E_0=-m\frac{G^2M^2}{2C^2}$.

On trouve alors $r=\dfrac{-2GMm\pm\sqrt{4m(mG^2M^2+2E_mC^2)}}{4E_m}=\dfrac{-GMm\pm\sqrt{m^2G^2M^2+2mE_mC^2}}{2E_m}$.

Attention : E_m est négative, donc la plus <u>grande</u> solution est

$r_{\max}=\dfrac{-GMm-\sqrt{m^2G^2M^2+2mE_mC^2}}{2E_m}=a+ae$. Or $E_m=-\dfrac{GMm}{2a}$ donc $GMm=-2aE_m$:

$r_{\max}=\dfrac{2aE_m-\sqrt{4a^2E_m^2+2mE_mC^2}}{2E_m}=a+ae$ donc $ae=\dfrac{-\sqrt{4a^2E_m^2+2mE_m^2\dfrac{C^2}{E_m}}}{2E_m}=-\dfrac{\sqrt{4a^2E_m^2}\sqrt{1+\dfrac{mC^2}{2a^2E_m}}}{2E_m}$.

Puisque $\sqrt{E_m^2}=-E_m$ (valeur négative), on trouve $e=\sqrt{1+\dfrac{mC^2}{2a^2E_m}}<1$ (calcul très délicat : on peut vérifier que $\dfrac{mC^2}{2a^2}$ a bien la dimension d'une énergie d'après l'expression de E_{eff}).

6. On a la vitesse aréolaire $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}C$, c'est la loi des aires (« version vitesse ») ou seconde loi de Kepler.

   On en déduit puisque le second membre est constant, par intégration entre les dates 0 et T, période du mouvement $S=\dfrac{1}{2}CT=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, avec, d'après la question précédente $1-e^2=-\dfrac{mC^2}{2a^2E_m}=+\dfrac{mC^2}{GMma}$.

   En élevant au carré la relation précédente : $C^2T^2=(2\pi)^2a^4(1-e^2)=(2\pi)^2a^4\dfrac{C^2}{GMa}$, donc $T^2=(2\pi)^2\dfrac{a^3}{GM}$.

   On a donc démontré la 3ème loi de Kepler à partir de la 2ème loi.

II-B/ Assistance gravitationnelle

7. On peut écrire (Chasles) $\vec{SM}=\vec{SO}+\vec{OM}$, où O est le centre de la Terre et S celui du Soleil. Comme le référentiel géocentrique est en translation dans le référentiel héliocentrique, les dérivées des vecteurs ont la même expression : $\dfrac{d\vec{SM}}{dt}=\dfrac{d\vec{SO}}{dt}+\dfrac{d\vec{OM}}{dt}$ donc $\vec{V}_H=\vec{v}_T+\vec{V}$.

8. L'énergie mécanique initiale est, puisqu'on est à distance infinie : $E_m=\dfrac{1}{2}mV_1^2$, qui est strictement positive.

   Le mouvement a donc lieu sur une branche d'hyperbole.

   Par ailleurs, l'énergie mécanique se conserve, et vaut à l'état final $E_m=\dfrac{1}{2}mV_2^2$: on en déduit que $V_2=V_1$

9. On projette sur la base cartésienne de la figure : $\vec{V}_1=\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2=\begin{pmatrix}V\cos\theta\\V\sin\theta\end{pmatrix}$.

   La composition des vitesses donne alors $\vec{V}_{1H}=\begin{pmatrix}V\\v_T\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_{2H}=\begin{pmatrix}V\cos\theta\\V\sin\theta+v_T\end{pmatrix}$.

   D'où $V_{1H}=\sqrt{V^2+v_T^2}$ et $V_{2H}=\sqrt{V^2\cos^2\theta+(V\sin\theta+v_T)^2}=\sqrt{V^2+v_T^2+2Vv_T\sin\theta}$.

   La vitesse héliocentrique doit augmenter : il faut que $\sin\theta>0$, donc θ aussi, et si possible maximal, donc idéalement que $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

10. On utilise le fait que la vitesse est uniforme sur l'orbite de périmètre $2\pi d_{\text{TS}}$ parcourue en $T=1\,\text{an}$.

    L'orbite de la Terre est circulaire, sa vitesse est nécessairement orthoradiale, donc $\vec{OS}$ est perpendiculaire à $\vec{v}_T$, dans le sens de $\hat{x}$.

11. On calcule $V_{1H}=\sqrt{30^2+10^2}\,\text{km/s}=31{,}6\,\text{km/s}$, puis $V_{2H}=37{,}7\,\text{km/s}$ ($\sin 45°=1/\sqrt{2}$), donc $\Delta V_H=6{,}12\,\text{km/s}$: le gain est très important !!