

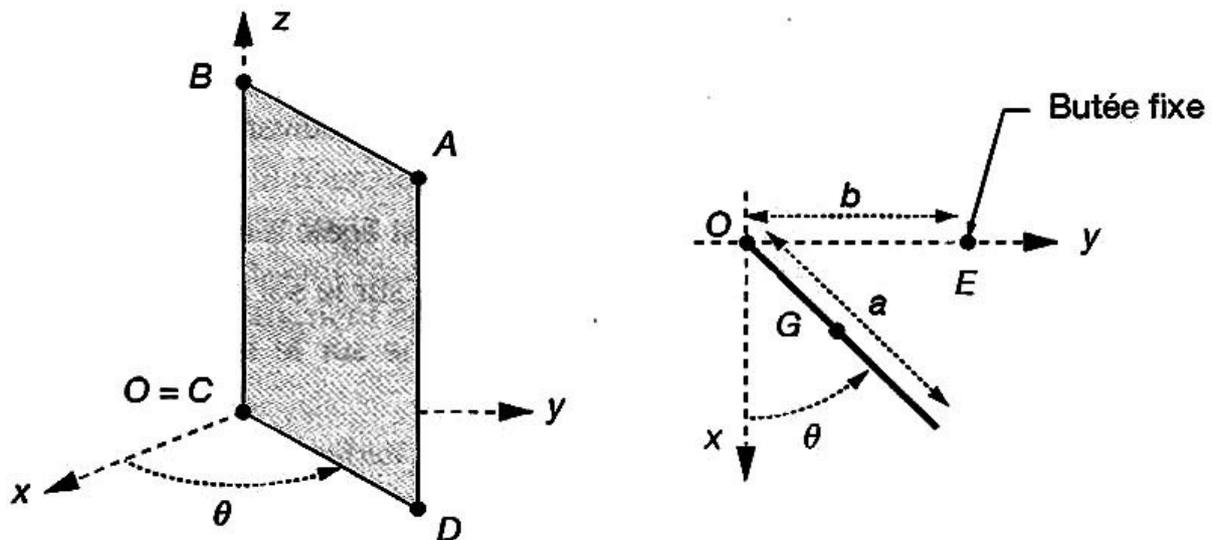
**À lire avec soin avant de commencer :**

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis.

On demande d'encadrer les résultats littéraux et de souligner les résultats numériques pour les mettre en évidence. De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie. Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision. La mauvaise foi sera sévèrement sanctionnée.

La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

## I – AU PETIT DÉJEUNER (4+5 PTS)

**Partie A : Réveil musculaire par l'ouverture brutale de la porte de la cuisine...**

Une porte est modélisée par une plaque mince rectangulaire homogène, de largeur  $a$ , de hauteur  $h$ , de masse  $m$  et de moment d'inertie  $J = \frac{1}{3} m a^2$  par rapport à l'axe de rotation vertical ( $Oz$ ).

La liaison support-porte est une liaison pivot idéale et on note  $\vec{R}$  la résultante des forces exercées par le support (gonds) sur la porte.

Une butée fixe quasi ponctuelle est placée en  $E(x=0, y=b, z=0)$ .

Les frottements de l'air sont négligés.

1. La porte est lancée avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$  positive en  $\theta_0=0$ .  
Obtenir l'expression de  $\theta(t)$ , puis la date  $\tau$  à laquelle la porte atteint la butée.
2. On modélise l'action de la butée pendant le choc par une force  $\vec{F} = +F \vec{u}_x$ , appliquée au point  $E$ , variable dans le temps.  
On suppose connue la fonction  $\theta(t)$  pendant le choc : c'est une fonction quasi constante mais telle que  $\dot{\theta}(t)$  varie entre  $\dot{\theta}(\tau_-)$  et  $\dot{\theta}(\tau_+) = -\dot{\theta}(\tau_-)$ .
  - a) Par application de la relation fondamentale de la dynamique pendant le choc, obtenir une relation entre  $\dot{\theta}(t)$ ,  $a$ ,  $m$ ,  $F$  et la coordonnée orthoradiale  $R_\theta$  de  $\vec{R}$ .  
On pourra noter l'accélération  $\ddot{\gamma}$  pour la distinguer de la longueur  $a$ .
  - b) Par application d'un second théorème, obtenir une autre relation, entre  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $m$  et  $F$ .
  - c) En déduire l'expression de la coordonnée orthoradiale  $R_\theta$  de  $\vec{R}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $F$ .
  - d) Pourquoi est-il intéressant de chercher à annuler  $R_\theta$  ?  
Obtenir, en fonction de  $a$ , la valeur optimale de  $b$  correspondante.

- e) Établir l'expression de la coordonnée radiale  $R_r$  de  $\vec{R}$  en fonction de  $a$ ,  $m$  et  $\dot{\theta}(t)$ .  
 On ne peut pas l'annuler. Pourquoi est-ce moins ennuyeux que dans le cas de  $R_o$  ?

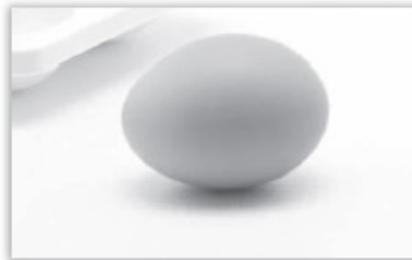
**Partie B : ... puis réveil de la dextérité à l'aide d'un œuf dur (CCINP TPC 2018)**

**Document 4 - L'œuf qui se dresse**

Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a



b

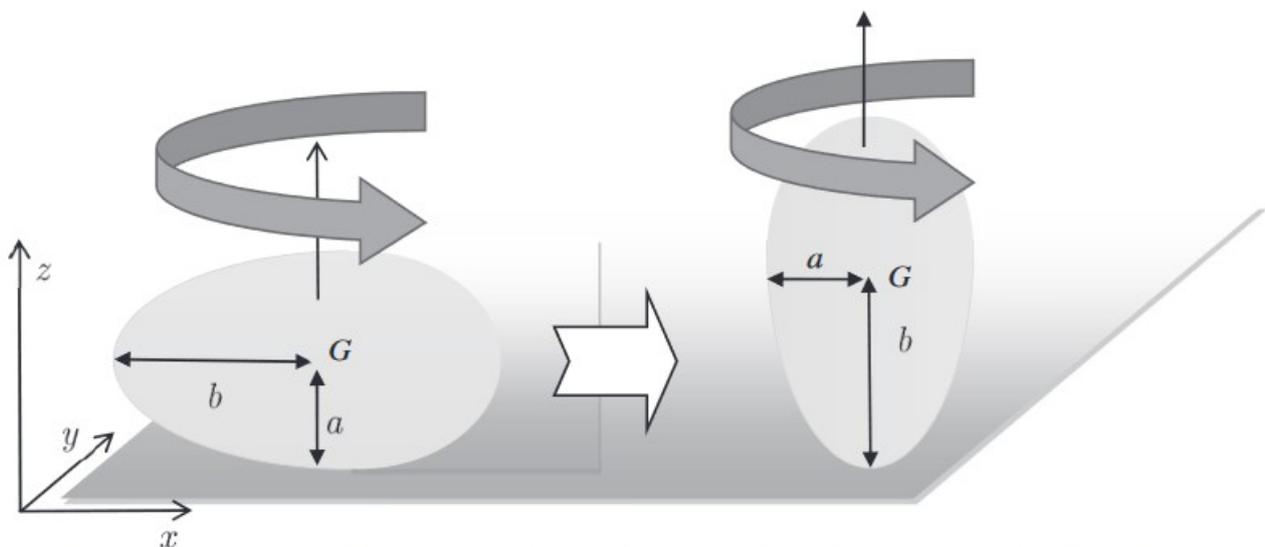


c

**Figure 11** – Evolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'œuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la **figure 12** :



**Figure 12** – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.

On modélise l'œuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse  $m$ , de demi petit axe  $a$  et de demi grand axe  $b$  (avec  $a < b$ ). Le centre de masse  $G$  est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'œuf).

Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse  $m$  par rapport à son axe de rotation  $Oz$  s'écrivent :

- $J_H = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$  lorsque l'œuf tourne à l'horizontale ;
- $J_V = \frac{2}{5} m a^2$  lorsque l'œuf tourne à la verticale.

On pose  $\Omega$  la vitesse de rotation de l'œuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

**Q37.** Exprimer l'énergie mécanique totale de l'œuf dans les deux positions  $E_{mH}$  et  $E_{mV}$  en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.

**Q38.** Montrer que pour  $\Omega > \Omega_C$  pulsation limite, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de  $\Omega_C$  en fonction de  $g$ ,  $a$  et  $b$ .

**Q39.** Calculer  $\Omega_C$  pour  $a = 2,0 \text{ cm}$ ,  $b = 3,0 \text{ cm}$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ . Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du **document 4**.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite :  $\Omega_0 = \Omega_C + \varepsilon$  (avec  $\varepsilon \ll \Omega_C$ ). L'œuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale  $\Omega_f$  que l'on peut écrire sous la forme  $\Omega_f = \Omega_C + r\varepsilon$  (avec  $r$  un nombre sans dimension).

**Q40.** Exprimer les énergies mécaniques initiale  $E_{mH}$  et finale  $E_{mV}$  au premier ordre en  $\varepsilon$ .

**Q41.** En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de  $r$  en fonction de  $a$  et de  $b$ . L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait  $r$  pour  $a \simeq b$  ? Commenter.

**Q42.** Calculer les moments cinétiques  $L_H$  et  $L_V$  de l'œuf par rapport à l'axe  $Oz$  avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique  $\Delta L = L_V - L_H$  en fonction de  $\Omega_C$ ,  $m$ ,  $a$  et  $b$ . L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

**Q43.** Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps  $\Delta t$  du redressement, l'œuf a subi un couple  $\vec{C}$ . Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe  $Oz$  peut s'écrire :

$$C_z \simeq \frac{2mg(a-b)}{\Omega_C \Delta t}.$$

**Q44.** Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Conclure l'explication de l'expérience sans calcul (mais précisément) à l'aide d'un court extrait du **document 4**.

## II – LA MISSION SPATIALE ROSETTA – COMÈTE 67P CHURYOMOV – GERASIMENKO

Partie A : Mines Physique II PSI 2017

6,5 pts

Partie B : d'après EPITA-IPSA Physique 2015

3,5 pts

**Partie A : Étude de la comète**

Ce sujet propose de revenir sur l'exploit réalisé par l'Agence Spatiale Européenne lors de l'accomplissement de la mission Rosetta. Cette mission consistait à rejoindre la comète 67P Churyomov – Gerasimenko (rebaptisée Churry à cette occasion) sur son orbite à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Une fois sur place la sonde devait étudier l'environnement de Churry en se satellisant autour d'elle. Une fois ce premier exploit réalisé le 6 août 2014, la sonde Rosetta devait envoyer un robot, nommé Philæ, pour qu'il se pose sur la comète et réalise une étude in situ. Ce robot a réussi à se poser sur la comète le 12 novembre 2014, il a ensuite réalisé sa mission de façon quasi-nominale pendant 3 jours dans des conditions physiques extrêmes. Il a ensuite transmis les données recueillies vers Rosetta toujours en orbite autour de Churry. Rosetta les a ensuite envoyées vers la Terre où nous les avons reçues quelques dizaines de minutes plus tard.

La réalisation complète de cette mission aurait pu être présentée comme un exploit retentissant de la conquête spatiale, n'ayant rien à envier aux premiers pas de l'homme sur la Lune. Cependant, le fait que Philæ se soit posé de façon peu stable, le traitement médiatique de ce genre d'évènement, et bien d'autres facteurs plus complexes, n'ont pas permis de se rendre compte de l'incroyable performance scientifique réalisée à l'occasion de cette mission.

Ce sujet revient sur différents aspects de la problématique associée à cette mission. La première partie consiste en l'étude des propriétés orbitales de Churry, la seconde partie consiste en une étude de l'environnement des comètes du type de Churry et notamment de sa chevelure et de sa queue. La dernière partie est une étude technique de la motorisation de la foreuse de Philæ. Ces trois parties sont totalement indépendantes.

Les résultats numériques des calculs seront des ordres de grandeurs ne possédant au plus qu'un seul chiffre significatif. Les valeurs numériques utiles sont rassemblées en fin d'énoncé. Hormis le nombre  $j$  tel que  $j^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées. Une quantité surmontée d'un point désigne la dérivée temporelle de cette quantité :  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ .

**I. — Etude de la comète 67P Churyomov – Gerasimenko**

La comète étudiée s'appelle Churyomov – Gerasimenko, du nom des scientifiques ukrainiens M. Churyomov, l'utilisateur du télescope, et Mme Gerasimenko, la comparatrice d'images, qui l'ont co-découverte en 1969. Cette comète mesure entre 3 et 5 km de diamètre et tourne sur elle-même en une douzaine d'heures. Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur la comète objet de Rosetta et Philæ. Les estimations sur sa masse, varient, quant à elles, d'un facteur 10 et sa forme exacte restera un mystère jusqu'en juillet 2014 date de la première photo envoyée par Rosetta. Le noyau de la comète n'a pu être observé que depuis la Terre (le Very Large Telescope au Chili en lumière visible ou proche infrarouge) ou les satellites tournant autour de la Terre (Hubble en lumière visible, Spitzer en moyen infrarouge). De ces observations ont été tirées des courbes de lumière qui, elles-mêmes, ont permis de déterminer quelques unes de ses caractéristiques.

□ 1 — En appliquant le principe fondamental de la mécanique à une comète de masse  $m$  en orbite circulaire de rayon  $R$  autour du Soleil, retrouver la 3<sup>e</sup> loi de Kepler. Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que cette relation se généralise en remplaçant le rayon  $R$  par le demi grand axe  $a$  de l'ellipse (voir figure 1). En déduire la relation entre le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse parcourue par la comète, la période  $T$  de la comète, la masse du Soleil  $M_{\odot}$  et la constante de gravitation  $G$ . Déterminer la valeur numérique de la période  $T_c$  de la comète Churry. On donne  $2\pi a_e = 33 \cdot 10^{11}$  SI et on prendra  $1 \text{ an} \simeq \frac{1}{3} \cdot 10^8$  secondes.

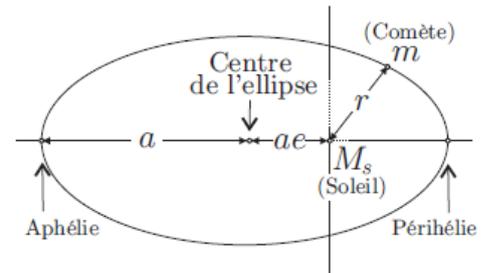


FIGURE 1 – Orbite elliptique d'excentricité  $e$  et de demi-grand axe  $a$ .

□ 2 — On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note  $\vec{r}$  le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et  $r = \|\vec{r}\|$ . Donner l'expression du moment cinétique  $\vec{\sigma}_s$  de la comète par rapport au Soleil. Montrer que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera. Déterminer l'expression de  $C = \frac{\|\vec{\sigma}_s\|}{m}$  en fonction des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de la comète dans ce plan.

□ 3 — Etablir la relation  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r)$  où  $E_m$  est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et  $E_{\text{eff}}(r)$  son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de  $C$ ,  $G$ ,  $m$ ,  $M_{\odot}$  et  $r$ . Tracer la représentation graphique de  $E_{\text{eff}}(r)$ , et positionner sur ce graphique  $E_m$ , l'aphélie  $r_{\text{max}}$  et le périphélie  $r_{\text{min}}$  (voir figure 1).

□ 4 — Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à  $r = r_{\text{min}} = r_{\text{max}} = r_0$  et  $E_m = E_0$ . Déterminer l'expression de  $r_0$  en fonction de  $C$ ,  $G$  et  $M_{\odot}$  puis en déduire celle de  $E_0$  en fonction de  $C$ ,  $G$ ,  $M_{\odot}$  et  $m$ . On note respectivement  $E_c(r)$  et  $E_p(r)$  les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance  $r$  du Soleil, déterminer la relation entre  $E_c(r_0)$  et  $E_p(r_0)$ .

□ 5 — Etablir l'équation du second degré en  $r$  dont  $r_{\text{min}}$  et  $r_{\text{max}}$  sont solutions, qui permet de déduire l'expression de  $E_m$  en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $M_{\odot}$  et  $a$ . On donnera cette expression. Après avoir montré que son discriminant est bien positif, résoudre l'équation et déterminer la relation liant  $e$  à  $E_m$ ,  $C$ ,  $a$  et  $m$ .

□ 6 — Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur de la comète sur le temps mis par la parcourir ? Quel est l'astronome qui a identifié cette propriété qui porte son nom ? Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité  $e$  et de demi-grand axe  $a$  est  $S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ , déterminer la relation entre la période de la comète et le demi-grand axe de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu.

Rosetta a bénéficié de 4 assistances gravitationnelles afin d'acquérir l'énergie nécessaire pour rejoindre la comète sur son orbite. La précision requise pour l'accomplissement de cet exploit est absolument insensée : fenêtre de quelques kilomètres entre des objets sur des orbites gravitationnelles à des vitesses de l'ordre du kilomètre par seconde, à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Peu de gens ont pris conscience de l'exploit réalisé par les ingénieurs de l'Agence Spatiale Européenne.

#### Données numériques

- Constante de la gravitation :  $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil :  $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

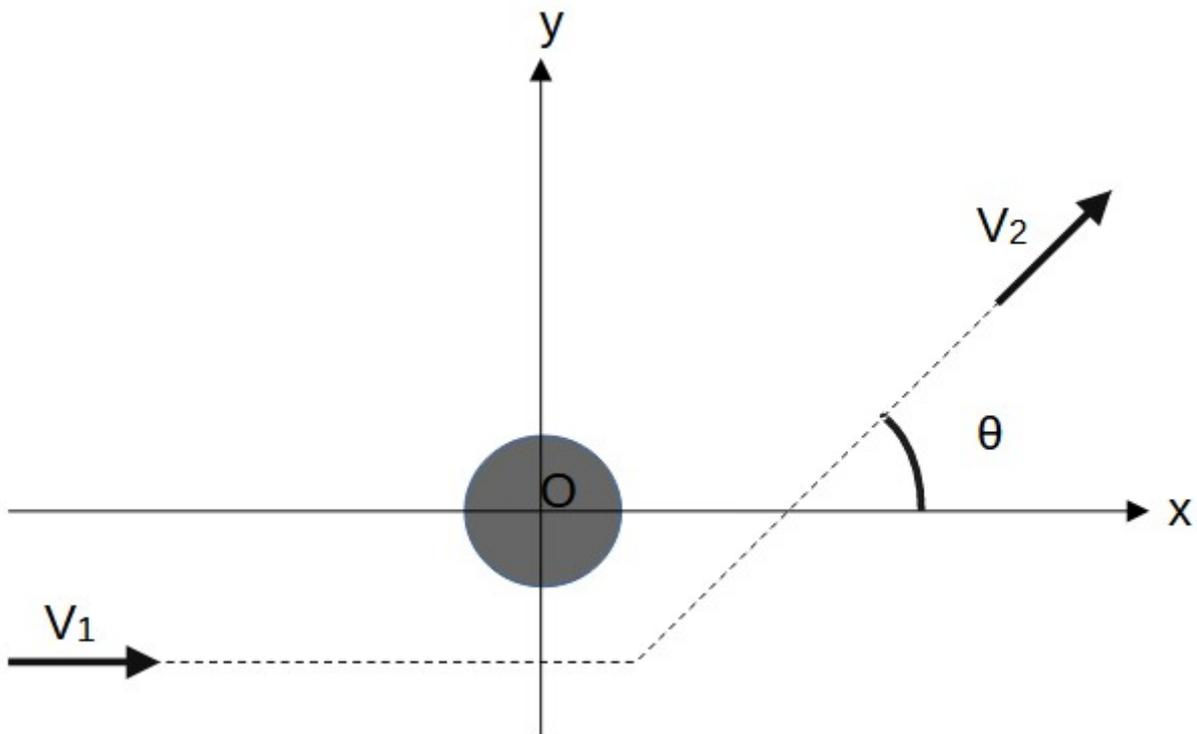
### Partie B : Modélisation simplifiée de l'assistance gravitationnelle

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée d'ergols, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation d'ergols. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen  $R_T$ . La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse  $\vec{V}_1$  dans le référentiel  $R_T$ .

La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique  $\vec{V}_2$ .

On limite l'étude à la situation où, dans le référentiel héliocentrique, le vecteur vitesse de la Terre  $\vec{v}_T$  est dirigé suivant la direction Oy de la **Figure 2**.



**Figure 2**

On note  $\vec{V}_{1H}$  la vitesse initiale de la sonde dans le référentiel héliocentrique, et  $\vec{V}_{2H}$  sa vitesse finale, une fois terminée l'interaction avec la Terre.

On donne la loi de composition des vitesses :  $\vec{V}_{1H} = \vec{V}_1 + \vec{v}_T$ , où, on le rappelle, l'absence de lettre en indice indique que la vitesse est celle de la sonde dans le référentiel géocentrique. La loi vérifiée par la vitesse finale est évidemment similaire (la variation du vecteur  $\vec{v}_T$  pendant l'interaction est négligeable).

7. Justifier rapidement la loi de composition des vitesses à partir de la définition des vecteurs vitesses.
8. Sans démonstration, donner la nature géométrique de la trajectoire suivie par la sonde Rosetta dans le référentiel géocentrique.

On admettra que dans ce référentiel, on peut ignorer les attractions solaire et lunaire sur la sonde.

Prouver que  $V_1 = V_2$ , que l'on notera  $V$ .

9. Exprimer les deux vecteurs  $\vec{V}_{1H}$  et  $\vec{V}_{2H}$  en coordonnées cartésiennes, en fonction de  $V$ ,  $v_T$  et  $\theta$ .  
En déduire les expressions de leur norme en fonction de  $V$ ,  $v_T$  et  $\sin\theta$  seulement.  
Quelle condition géométrique doit être respectée pour qu'il y ait assistance gravitationnelle ? pour qu'elle soit la plus efficace possible ?
10. La distance Terre Soleil est supposée constante, égale à  $d_{TS}=1,5 \cdot 10^{11}$  m . Prouver, mais sans utiliser comme donnée numérique la masse du Soleil, que  $v_T=30$  km/s .  
Justifier que, le Soleil étant supposé dans le plan de figure et la sonde Rosetta initialement plus loin du Soleil que la Terre, le Soleil se trouve précisément sur la demi-droite  $[Ox)$ .
11. Calculer  $\Delta V_H = V_{2H} - V_{1H}$  pour  $V=10$  km/s et  $\theta=45^\circ$  .

### III – COURS : LOI DES GAZ PARFAITS (2 PTS)

1. Donner la définition cinétique de la température en kelvins. On introduira la constante de Boltzmann  $k_B$  .
2. Obtenir l'expression de la pression à partir du modèle simplifié des chocs moléculaires : on rappelle que chaque molécule a dans ce modèle la même valeur de vitesse égale à la vitesse quadratique moyenne, et que chacune ne se déplace que selon les axes cartésiens, avec une probabilité égale pour toutes les directions.
3. Démontrer la loi des gaz parfaits.

FIN