

TD 23 – Conservation de l'énergie

1. Jouet à air comprimé

a) La conservation de l'énergie totale donne $\Delta U + \Delta E_c + \Delta E_{pp} = W + Q$ avec des transferts nuls : le travail du poids est dans l'énergie potentielle de pesanteur, et aucun transfert thermique avec l'extérieur (« sans perte »).

On a :

$$\Delta U = \frac{5}{2} n R (T_0 - T_1) \text{ et } n R T_1 = P V : \Delta U = \frac{5}{2} P V \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right)$$

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta E_{pp} = m g h - 0$$

dont la somme est nulle : $m g h = \frac{5}{2} P V \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \frac{1}{2} m v_0^2$

AN pour les deux contributions, pour comparer : $-\Delta U = \frac{5}{2} P V \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) = 768 \text{ J}$,

$-\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = 9 \text{ J}$, beaucoup plus faible ...

On trouve $h = 39,6 \text{ m}$, et

b) ... sans le terme d'énergie interne : $h_{\text{mec}} = 45,9 \text{ cm}$

2. Transformation cyclique

a) $P_B = 2P_0$ car $PV = nRT$ et n, V fixés, $V_C = 2V_0$ car P est divisée par 2 et T est fixée.

b)

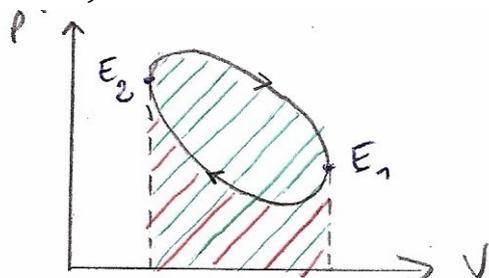
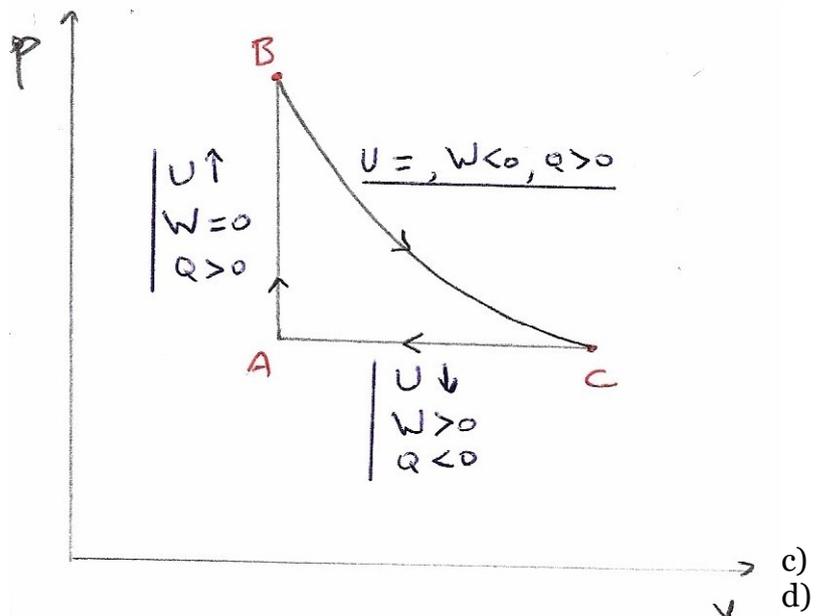
$$W_{AB} = 0,$$

$$W_{BC} = \int_{V_0}^{2V_0} -P dV = -2 \ln 2 n R T_0,$$

$$W_{CA} = \int_{2V_0}^{V_0} -P dV = +P_0 V_0 = n R T_0 \text{ donc}$$

$W = -(2 \ln 2 - 1) n R T_0 < 0$: le gaz a fourni du travail, c'est un cycle moteur.

Aire du cycle = valeur absolue du travail + sens horaire = travail négatif (fourni).



$\Delta_{A \rightarrow B \dots \rightarrow A} U = 0$ car c'est une transformation cyclique : $Q = -W > 0$

e) $A \rightarrow B$: $W = 0$ (isochore), $Q > 0$ et U augmente car $U = U(T)$ avec T qui a augmenté.

$B \rightarrow C$: $W < 0$ (calculé), U reste constante (T cte) donc $Q > 0$

$C \rightarrow A$: $W > 0$ (calculé), U diminue car T aussi, donc $Q < 0$

3. Phase condensée

On a $C = \frac{dU}{dT}$ pour une PCI : il suffit donc d'intégrer entre les deux températures.

$$U(T_2) - U(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} C(T) dT : \Delta U = C_0(T_2 - T_1) + a \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{2} b(T_2^2 - T_1^2)$$

4. Ballon de baudruche

Ballon de baudruche

a) On utilise la loi des GP : $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$ avec $V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$, r_0 étant le rayon : $r_0 = 20 \text{ cm}$

$$\text{donc } n = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times \frac{4}{3} \pi (0,20)^3}{8,314 \times (273 + 33)} = 1,334 \text{ mol}$$

(avec $V_0 = 33,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$)

on a la conservation de n :

$$\frac{P_0 V_1}{RT_1} = \frac{P_0 V_0}{RT_0} : V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = 31,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

on en déduit $d_1 = 2 \left(\frac{3V_1}{4\pi} \right)^{1/3} : \underline{d_1 = 39,0 \text{ cm}}$

b) He : GP monoatomique $U = \frac{3}{2} nRT$

$$\Delta U + \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p} = W_{pr} + \cancel{W_u} + Q : Q = \Delta U - W_{pr}$$

où la transformation est isobare, donc monobare :

$$Q = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_0) + P_0(V_1 - V_0)$$

$$= \frac{3}{2} nR(T_1 - T_0) + nRT_1 - nRT_0$$

$$\underline{Q = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0)}$$

A.N : $\underline{Q = -638 \text{ J}}$

5. Équilibre thermique d'un système

Système isobare

1. Transformation isobare : la pression extérieure est constante à P_0 et l'expérience est suffisamment lente pour que P soit uniforme.

2. Aucun travail reçu par le cuivre : son volume est constant.

Dans le cas du gaz, la transfo est isobare, donc monobare :

$$\delta W_{pr} = -P_0 dV \quad \therefore \underline{W_{pr}} = \int \delta W_{pr} = \underline{-P_0 (V_F - V_0)} < 0$$

En effet $V_F > V_0$: le bloc de cuivre chauffe le gaz à pression constante, son volume augmente.

3. Premier principe, système = { gaz + cuivre }

$$\Delta U + \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p} = W_{pr} + \cancel{Q} + W_{\cancel{c}}$$

négligeable isolé

$$\text{avec } U = U_{\text{gaz}} + U_{\text{cuivre}} : \Delta U = \frac{5}{2} n R (T_F - T_0) + m c (T_F - T_I)$$

$$\left(\frac{5}{2} \text{ ou bien } \frac{1}{\gamma-1} \text{ avec } \gamma = 1,40 \right)$$

De plus $P_0 V_0 = nRT_0$ et $P_0 V_F = P_F V_F = nRT_F$

donc
$$\frac{5}{2} nR (T_F - T_0) + mC (T_F - T_I) = -nRT_F + nRT_0$$

$$= -nR (T_F - T_0) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} nR (T_F - T_0) + mC (T_F - T_I) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow T_F = \frac{7/2 nR T_0 + mC T_I}{7/2 nR + mC} = 64,7^\circ\text{C} \text{ car } n = 0,818 \text{ mol}$$

À Vct : Même équation (1) avec 0 à droite

$$\frac{5}{2} nR (T_F - T_0) + mC (T_F - T_I) = 0 : \left\| \begin{aligned} T_F &= \frac{5/2 nR T_0 + mC T_I}{5/2 nR + mC} \\ T_F &= 76,8^\circ\text{C} \end{aligned} \right.$$

Système isobare (2)

4. (J)	Cuivre	Gaz	Total
ΔU	$mC (T_F - T_I) = -1040$	$C_V (T_F - T_I) = 743$	-297
W	0	$-nR (T_F - T_0) = -297$	-297
Q	$= \Delta U = -1040$	$= \Delta U - W = 1040$	0

5. Transf isobare \Rightarrow monobare + $P_I = P_F = P_0$, donc

$$\Delta H + \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p} = \cancel{Q} + W_u \quad ; \quad \Delta H = 0$$

$$\Delta H = \Delta H_{\text{cuivre}} + \Delta H_{\text{gaz}} = mC (T_F - T_I) + \frac{7}{2} nR (T_F - T_0)$$

$$= 0$$

qui est l'équation (2) de la question 3.

6.

Recherche état final

a) La pression est double à droite de la cloison ; celle-ci va partir comprimer le gaz à gauche → oscillations à cause du ressort, puis équilibre où $V_1 < V_2$.

b) Le volume total se conserve : $V_1 + V_2 = 2V_0$ (1)

La paroi est diatherme

donc même température : $T_1 = T_2$ (2)

finale

Les quantités se conservent : $\frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$ (3)

(R se simplifie)

$\frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0}$ (4)

Équilibre mécanique de la paroi ; avec ← x :

$-P_1 S + P_2 S - kx = 0$

où x est le déplacement de la cloison,

or $x = \frac{V_2 - V_0}{S}$

$P_1 = P_2 - k \frac{V_2 - V_0}{S^2}$ (5)

Conservation de l'énergie totale

$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$ et $U = \frac{5}{2} nRT$

$U_{10} = \frac{5}{2} P_0 V_0$

$U_{1F} = \frac{5}{2} P_1 V_1$

$U_{20} = \frac{5}{2} (2P_0 V_0)$

$U_{2F} = \frac{5}{2} P_2 V_2$

$E_{PF} = \frac{1}{2} kx^2$

$3P_0 V_0 = P_1 V_1 + P_2 V_2 + k \frac{(V_2 - V_0)^2}{S^2}$ (6)

6. Chute d'un piston

a) On a bien sûr $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$, où V_0 n'est pas connu, mais le cylindre étant cylindrique, on a $V_0 = S H_0$.

b) Le coefficient γ est donné, et on a $\begin{cases} C_p/C_v = \gamma \\ C_p = C_v + nR \end{cases}$ donc $C_p = \gamma C_v$ et $C_v = \frac{1}{\gamma - 1} nR$, ainsi que $C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR$ (avec $nR = \frac{S P_0 H_0}{T_0}$)

c) La transformation étant très lente et les parois diathermes, il y aura à tout instant équilibre thermique à T_0 : la transformation est donc isotherme.

d) On aura bien évidemment $T_1 = T_0$.

Le piston, certes sans masse au départ, a maintenant une masse m sur lui : son équilibre mécanique donne (calcul déjà fait plusieurs fois) $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$.

La température n'ayant pas changé, la conservation de n aboutit à $PV = \text{cte}$, soit

$$P_0 V_0 = P_1 V_1, \text{ et puisque } S \text{ se simplifie : } H_1 = H_0 \frac{P_0}{P_1}$$

e) Non, puisqu'elle ne dépend que de la température, qui n'a pas changé.

f) La transformation est brutale et adiabatique.

g) L'équilibre du piston donne le même résultat qu'avant : $P_2 = P_0 + \frac{mg}{S} = P_1$

h) Conservation de n : $\frac{PV}{T} = \text{cte}$ donc $\frac{T_2}{T_0} = \frac{P_2 H_2}{P_0 H_0}$.

i) Pour le système {gaz+piston+masse}, on a $\Delta E_{\text{tot}} = \Delta U + \Delta E_C + \Delta E_p = Q + W_{\text{pr}} + W_U$.

Pas de travail utile W_U , ni de transfert thermique Q (tout est calorifugé), ni de variation d'énergie cinétique (immobilité au début et à la fin, même si E_C est non nulle pendant la transformation).

L'énergie potentielle de pesanteur varie : $\Delta E_p = mg(H_2 - H_0)$ (la masse du piston lui-même est négligeable – énoncé – et celle du gaz aussi – sous entendu).

L'atmosphère étant un pressostat, le travail reçu par le système est (la transformation est monobare : la pression peut sortir de l'intégrale du travail) :

$$W_{\text{pr}} = -P_0 \Delta V = -P_0 S (H_2 - H_0)$$

Le piston étant calorifugé, sa température et son énergie interne ne varient pas, il ne reste que la variation d'énergie interne de l'air $\Delta U = C_v \Delta T = C_v (T_2 - T_0)$.

Finalement : $C_v (T_2 - T_0) + 0 + mg(H_2 - H_0) = 0 - P_0 S (H_2 - H_0) + 0$ soit

$$C_v (T_2 - T_0) = (mg + P_0 S)(H_0 - H_2), \text{ qui est bien l'expression demandée puisque } P_2 S = P_0 S + mg.$$

Attention : la transformation du système complet est bien monobare, mais les hypothèses nécessaires à l'application du premier principe enthalpique ne sont pas vérifiées :

mais $P_F = P_2 \neq P_0$.

j) On veut éliminer C_V et les hauteurs : $\frac{SP_0H_0}{T_0}(T_2-T_0)=(\gamma-1)P_2S(H_0-H_2)$.

On divise par SP_0H_0 : $\frac{T_2}{T_0}-1=(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\left(1-\frac{H_2}{H_0}\right)$, et on a obtenu ce dernier rapport :

$$\frac{H_2}{H_0}=\frac{T_2 P_0}{T_0 P_2}.$$

$$\frac{T_2}{T_0}-1=(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\left(1-\frac{T_2 P_0}{T_0 P_2}\right)=(\gamma-1)\left(\frac{P_2}{P_0}-\frac{T_2}{T_0}\right) : (1+\gamma-1)\frac{T_2}{T_0}=1+(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0} \text{ et donc}$$

$$T_2=\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\right)T_0.$$

Puisque $P_2 > P_0$, $T_2 > \frac{1}{\gamma}(1+(\gamma-1))T_0$, donc $T_2 > T_0$: c'est normal, le système est calorifugé, mais il a reçu du travail, son énergie interne a donc augmenté, et donc sa température aussi.

7. Détente brutale d'un gaz parfait

1. Les forces sur le piston sont horizontales : à l'équilibre, la pression du gaz est donc égale à p_0 .

On a donc $n=\frac{p_0 V_0}{RT_0}+0$ (0 à droite).

2. Le piston est maintenant en mouvement, on a donc $m\vec{a}=+p_0 S\vec{u}_x-p_G S\vec{u}_x$, en prenant l'axe x vers la droite et en notant p_G la pression exercée par le gaz sur le piston.

Comme la masse du piston est supposée nulle, le terme à gauche s'annule, et on a $p_0 S\vec{u}_x=p_G S\vec{u}_x$, donc égalité des pressions : $p_G=p_0$.

(Pour les puristes, d'accord que $p_G=p_0$ s'exerce à l'intérieur de la frontière du système gaz, et pas à l'extérieur, mais les actions réciproques conduisent à $\vec{F}_{\text{gaz/piston}}=-\vec{F}_{\text{piston/gaz}}$)

3. Comme la pression est différente (« strictement ») de p_0 , le piston est nécessairement bloqué par la cloison F.
4. D'après la question suivante, la température intervient dans au moins l'une des méthodes : c'est par le bilan d'énergie totale $\Delta E_{\text{tot}}=\Delta U+\Delta E_C+\Delta E_p=Q+W_{pr}+W_U$ où $Q=W_U=0$ ainsi que $\Delta E_C=\Delta E_p=0$.

Par ailleurs, $\Delta U=C_V \Delta T$: $W_{pr}=W_1=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_0 V_0}{T_0}(T_1-T_0)$.

Dans la seconde méthode, on le calcule directement, à partir du travail des forces de pression :

force de pression à gauche : $+p_0 S\vec{u}_x$, constante, avec comme déplacement la longueur L_A du compartiment A dans le même sens, donc $W_G=+p_0 S L_A$.

force de pression à droite : 0, car c'est le vide...

On a donc $W_1=+p_0 V_0$.

(On ne peut pas appliquer ici $\delta W_{pr}=-P_{\text{ext}}dV$ car il y a deux pressions différentes qui

s'exercent sur la frontière mobile du système, et il fallait pour ce résultat l'hypothèse P_{ext} uniforme à la frontière).

5. On égalise en divisant par $p_0 V_0$: $\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = 1$, ce qui donne bien $T_1 = \gamma T_0$.

6. La quantité se conserve, donc $\frac{p_1 V_B}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ soit $p_1 = \gamma \frac{V_0}{V_B} p_0$.

On souhaite que $p_1 < p_0$: $\gamma \frac{V_0}{V_B} < 1$ donc $V_B > V_{Bm}$ avec $V_{Bm} = \gamma V_0$

7. Le travail reçu est maintenant nul : $\Delta U = 0$ d'après le premier principe, et comme U ne dépend que de T pour un GP, la température ne varie pas : $T_2 = T_0$.

(On le retrouve évidemment avec $\Delta U = C_v \Delta T$: $\Delta T = 0$)