Fil élastique

1. Coefficients de dilatation

   Pour obtenir λ, on exprime L avec l'équation d'état : $L=L_0+\dfrac{F}{k-AT}$. D'où $\left(\dfrac{\partial L}{\partial T}\right)_F=\dfrac{(-A)F}{-(k-AT)^2}$

   On en déduit en utilisant à nouveau l'équation d'état $\lambda=\dfrac{A}{k-A\,T}\left(\dfrac{L}{L_0}-1\right)$.

   De même, pour obtenir μ, on dérive L par rapport à F, à T constante : $\left(\dfrac{\partial L}{\partial F}\right)_T=\dfrac{1}{k-AT}$ et donc

   $\mu=\dfrac{1}{L_0(k-A\,T)}$

   On calcule $k-A\,T_0=1{,}45\cdot 10^5\,\mathrm{N/m}$, puis $\lambda=2{,}10\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et $\mu=1{,}05\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}^{-1}$.

   Dans ces conditions, puisque $dL_F=\lambda L_0 dT_F$, avec $L_0=1\,\mathrm{m}$, le fil s'allonge de $21{,}0\,\mu\mathrm{m}$ à chaque degré supplémentaire, si la force reste constante.

   De même, puisque $dL_T=\mu L_0 dF_T$, dans les conditions choisies, à température constante, le fil s'allonge de $10{,}5\,\mu\mathrm{m}$ à chaque newton supplémentaire.

2. Travail dans les transformations courantes

   a) À longueur constante, le travail élémentaire $\delta W=F\,dL$ est nul, donc le travail $W_L=\int\delta W$ est nul également.

   b) On calcule $W_F=\displaystyle\int_{L_i}^{L_f}F_0\,dL$, donc puisque F_0 est une constante, $W_F=F_0(L_f-L_i)=F_0\,\Delta_{if}L$

   c) Transformation isotherme réversible :

      i. On a ici $\delta W=F\,dL=(k-AT_0)(L-L_0)\,dL$ donc $W_T=(k-AT_0)\displaystyle\int_{L_0}^{L}(L-L_0)\,dL=(k-AT-0)\left[\frac{1}{2}(L-L_0)^2\right]_{L_0}^{L}$

      soit $W_T=\dfrac{1}{2}(k-AT_0)(L-L_0)^2$.

      On utilise l'équation d'état pour l'obtenir en fonction de F et L : $W_T=\dfrac{1}{2}F(L-L_0)=\dfrac{1}{2}F\,\Delta L$

      ii. On utilise le premier principe : $\Delta U=W+Q$ (pas d'énergie cinétique, ni d'énergie potentielle, ni de travail utile).

      On a $U_i=U_0$, puisque $T=T_0$ et $L=L_0$, et $U_f=U_0+\dfrac{1}{2}k\left(L-L_0\right)^2$ donc $\Delta U=\dfrac{1}{2}k\left(L-L_0\right)^2$.

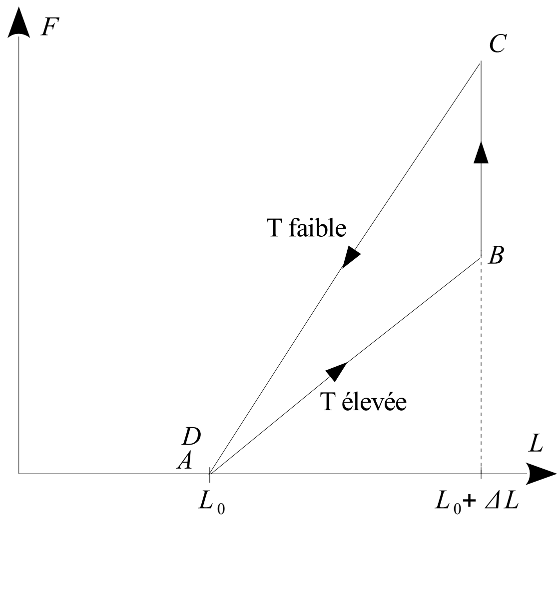
      On a obtenu à la question précédente $W=\dfrac{1}{2}(k-A\,T_0)(L-L_0)^2$.

      On en déduit $Q=\Delta U-W$ soit $Q_T=\dfrac{1}{2}A\,T_0(L-L_0)^2=\dfrac{1}{2}A\,T_0(\Delta L)^2$

      Application numérique : $\Delta L=1{,}0\,\mathrm{cm}=1{,}0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ donc $Q_T=2{,}73\ \mathrm{J}$

3. Diagramme (F,L)

   a) Au point A, le fil est détendu, donc $L=L_0$, et d'après l'équation d'état, la force est nulle : A a donc pour coordonnées $A\,(L=L_0\,;F=0)$
   Les isothermes, d'après l'équation d'état, sont des droites passant par le point A, et dont la pente est $k-A\,T$. Plus la température est élevée, plus la pente est faible. Donc :
   * $A\rightarrow B$: segment de droite de pente faible, jusqu'à $L_0+\Delta L$;
   * $B\rightarrow C$ se produit à longueur constante : il s'agit donc d'un segment vertical ;



* $C \to D$ est une isotherme réversible à la température $T_0 < T_1$: elle est donc représentée par un segment de pente supérieure à la précédente. On atteint le point A puisqu'on retourne à la longueur à vide L_0.

On en déduit aussi qu'on doit monter verticalement lors de la transformation $B \to C$ pour rejoindre cette isotherme.
* Dans la transformation $D \to A$, seule la température change, mais la longueur reste égale à L_0, donc la force reste toujours nulle : cette transformation est représentée par un point sur le diagramme.

b) On a $\delta W = F\,dL$ donc pour toute transformation réversible $W = \int_{L_i}^{L_f} F(L)\,dL$: le travail est donc l'aire sous la courbe de la transformation, entre les abscisses L_i et L_f.
Dans le cas d'un cycle, on obtient le travail comme l'aire du cycle, car l'aire sous la transformation la plus proche de l'axe des abscisses est balayée deux fois en sens contraire, donc disparaît.

c) L'aire du cycle est ici négative. Contrairement à ce qui se passe dans les diagrammes de Clapeyron, il n'y a pas de signe moins devant le travail : le travail reçu est donc lui aussi négatif, ce qui correspond à un travail positif fourni à l'extérieur. Il s'agit bien d'un moteur.

En appliquant le premier principe, on a $\Delta U = W + Q = 0$, car puisque U est une fonction d'état, sa valeur ne change pas sur un cycle. Donc $Q = -W$: le transfert thermique reçu est positif, il est transformé en travail à chaque cycle.

4. Capacités thermiques

a) On a $C_L = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L$, car à longueur constante, $dU = \delta Q$ puisque $\delta W = 0$. En dérivant l'expression donnée de l'énergie interne, on retrouve bien C_L.

b) Fonction d'état J

i. Appliquons le premier principe : $\Delta U = W + Q$. Or nous avons calculé le travail à force constante : $W = F(L_f - L_i)$; remplaçons : $U_f - U_i = F L_f - F L_i + Q$.
Puisque $F = F_i = F_f$, on peut écrire $(U_f - F_f L_f) - (U_i - F_i L_i) = Q$, donc $Q = J_f - J_i$ □

ii. On a donc $J = U_0 + C_L(T - T_0) + \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 - F L$, expression qu'on dérive par rapport à T, à force F constante : $C_F = C_L + k(L - L_0)\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F - F\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = C_L + \left[k(L - L_0) - F\right]\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F$.
En utilisant l'équation d'état, on a $k(L - L_0) - F = A\,T(L - L_0)$ et cette dérivée partielle de L a déjà été obtenue à la question 1.a) : $\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = A\,\frac{L - L_0}{k - A\,T}$, donc en remplaçant : $C_F = C_L + \frac{A^2 T(L - L_0)^2}{k - A\,T}$.
Il suffit d'utiliser à nouveau l'équation d'état pour obtenir l'expression demandée.

iii. Application numérique $C_F - C_L = 0{,}014\ \mathrm{J/K}$: l'écart est très faible.