

Qualité de la neige

1. La neige est donc humide : coexistence solide - liquide à l'atmosphère donc $T_0 = 0^\circ\text{C}$.

La calorimètre est en équilibre avec l'huile donc $T_1' = T_1 = -40^\circ\text{C}$

La température finale étant strictement négative, il n'y a plus que du solide : toute l'eau liquide a gelé.

2. Fuites thermiques négligées + expérience isobare

$$\Leftrightarrow \Delta H = \sum \Delta H_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta H_{\text{calo}} + \Delta H_{\text{silicone}} + \Delta H_{\text{neige}} = 0$$

$$\Leftrightarrow C(T_F - T_1) +$$

$$m_1 c_1 (T_F - T_1) +$$

$$(x_L m)(-L) + m C (T_F - T_0) = 0$$

masse d'eau dans la neige, avec $x_L = t$ puisqu'on néglige l'air.

$-L$ = enthalpie massique de solidification

$$\Leftrightarrow \left\| x_L = t = \frac{(C + m_1 c_1)(T_F - T_1) + m C (T_F - T_0)}{m L} \right.$$

$$x_L = 15\%$$

3. Pour les neiges très mouillées, il se pourrait que toute l'eau ne gèle pas : on aurait un équilibre final à 0°C , avec un équilibre LS inconnu, et on ne pourrait pas en déduire t .

4. Dans ce cas, il n'y a pas d'eau dans la neige : $t = 0\%$.

Le calorimètre affichera alors une température très négative, inférieure à celle obtenue pour une neige sèche à 0°C .

Le contrôleur pourra conclure (il n'a même à déterminer la température initiale de la neige).

PUISER DANS LA MER ROUGE POUR SAUVER LA MER MORTE

Q1. En une année, durée notée τ , on a $V_{\text{pertes}} = S h_{\text{pertes}} \tau$ où $S = 637 \text{ km}^2$ (aire actuelle de la mer) et $h_{\text{pertes}} = 1 \text{ m/an}$ (hauteur perdue) : $V_{\text{pertes}} = 637 (10^3 \text{ m})^2 \times 1 \text{ m/an} \times 1 \text{ an} = 6,37 \cdot 10^8 \text{ m}^3$.

Q2. Le Jourdain apporte le volume $V_{\text{jourd}} = D_v \tau$, les précipitations le volume $V_p = h_p S \tau$, et l'évaporation fait perdre le volume $V_{\text{vap}} = h_{\text{vap}} S \tau$.

D'après le bilan de volume algébrique $\Delta V = V_{\text{entrant}}$ (pas de source de création de volume), on trouve

$$-V_{\text{pertes}} = V_{\text{jourd}} + V_p - V_{\text{vap}} : -S h_{\text{pertes}} \tau = D_v \tau + h_p S \tau - h_{\text{vap}} S \tau \text{ donc } h_{\text{vap}} = \frac{D_v}{S} + h_p + h_{\text{pertes}}.$$

Application numérique en m/an :

$$h_{\text{vap}} = \frac{16 \text{ m}^3}{365 \times 24 \times 3600 \text{ an} \times 6,37 \cdot 10^8 \text{ m}^2} + 60 \cdot 10^{-3} \text{ m/an} + 1 \text{ m/an} = 0,79 \text{ m/an} + 0,06 \text{ m/an} + 1 \text{ m/an} = 1,85 \text{ m/an}$$

(La précision n'est en réalité pas de 0,01 m/an, puisque la hauteur perdue est **d'environ** 1 m/an).

Q3. L'évaporation serait la même, donc, avec des notations évidentes $h_{\text{vap}} = 0 + h_p + h'_{\text{pertes}}$. En égalisant les équations $h'_{\text{pertes}} = h_{\text{pertes}} + \frac{D_v}{S} = 1,79 \text{ m/an}$ (très logique : les pertes sont alors augmentées de l'apport du Jourdain puisque cet apport s'arrête – raisonner ainsi est une démonstration valide), donc des pertes presque doublées.

Q4. On a $dL = u^* dt$, distance maximale parcourue à la vitesse supposée uniforme u^* , pour les molécules puissent atteindre S.

Q5. Il suffit de compter les molécules d'eau dans le volume cylindrique, et de n'en garder que 1/6, qui vont dans la bonne direction : $dN = \frac{1}{6} n^* S dL$. La masse totale est donc $dm = m^* dN = \frac{1}{6} m^* n^* u^* S dt$.

Q6. On applique donc la définition du courant de masse, en multipliant par la probabilité β que chaque molécule reste dans le liquide : $j_{V \rightarrow L} = \frac{1}{6} \beta m^* n^* u^*$.

Q7. D'après le cours (définition de l'énergie cinétique de translation et de la vitesse quadratique moyenne) :

$$\frac{1}{2} m^* u^{*2} = \frac{3}{2} k_B T \text{ donc } u^* = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m^*}}. \text{ Par ailleurs, } R = k_B N_A, \text{ et } M = m^* N_A, \text{ donc } u^* = \sqrt{\frac{3 R T}{M}}.$$

Q8. Il faut faire intervenir la loi des gaz parfaits : $p_V V = n_V R T$, où n_V est la quantité de matière en vapeur d'eau :

$$p_V = \frac{N_V}{N_A V} R T = n^* \frac{R}{N_A} T ; \text{ on peut remplacer } n^* \text{ dans l'expression obtenue : } n^* = p_V \frac{N_A}{R T}, \text{ et de plus } m^* = \frac{M}{N_A}, \text{ donc}$$

$$j_{V \rightarrow L} = \frac{1}{6} \beta \frac{M}{N_A} p_V \frac{N_A}{R T} \sqrt{\frac{3 R T}{M}} = \frac{1}{2} \beta p_V \frac{M}{3 R T} \sqrt{\frac{3 R T}{M}} \#, \text{ en passant le rapport sous la racine.}$$

Q9. La zone « L+V » est limitée à la courbe elle-même, le liquide L se trouve au-dessus (pressions « élevées », basses températures), et la vapeur V en-dessous (pressions faibles).

Q10. $p_V = p_{\text{sat}}$, donc $D = \frac{p_V}{p_{\text{sat}}} = 1 = 100\%$.

Q11. On aurait alors $j_{V \rightarrow L} = j_{L \rightarrow V}$ car le liquide serait en équilibre avec la vapeur : l'évaporation est nulle lorsque le degré d'hygrométrie est de 100 %, il y a donc à tout moment autant de vapeur qui se liquéfie que de liquide qui se vaporise.

PCSI2 2023/24 – DS n°6 (correction)

Q12.

	A	B	C	D	E
1	M(H2O)	1,80E-02 kg/mol		β	5,00E-05
2	R	8,314 J/mol.K			
3					
4	T0	273 K (=0°C)			
5	P0	1,00E+05 Pa (par bar)			
6					
7	T(°C)	T(K)	Psat(bar)	Psat(Pa)	J V → L (kg/m².s)
8	0	273	0,006	600	2,43882451E-05
9	10	283	0,012	1200	4,79069643E-05
10	20	293	0,023	2300	9,02411559E-05
11	30	303	0,042	4200	0,000162046106
12	40	313	0,074	7400	0,000280911924
13	50	323	0,123	12300	0,000459636463

Q13. On a donc $j_{v \rightarrow L} = \beta \frac{p_v}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$, qui dépend de p_v , alors que $j_{L \rightarrow v} = \beta \frac{p_{\text{sat}}}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$, valeur de $j_{v \rightarrow L}$ calculée pour $p_v = p_{\text{sat}}$, et qui ne dépend que de p_{sat} .

On trouve donc $j_{\text{vap}} = \beta \frac{p_{\text{sat}}}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}} - \beta \frac{D p_{\text{sat}}}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$ soit $j_{\text{vap}} = (1-D) \beta \frac{p_{\text{sat}}}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}} = (1-D) j_{L \rightarrow v}$.

Q14. On calcule $j_{\text{vap}} = (1-D) j_{L \rightarrow v}(20^\circ\text{C}) = 6,31 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Avec la donnée de la masse volumique de l'eau liquide, on trouve que 1 kg occupe $1\text{L} = 10^{-3} \text{ m}^3$, donc $h_{\text{vap}} = 6,31 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 6,31 \cdot 10^{-8} \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ m} \cdot \text{an}^{-1} = 1,99 \text{ m/an}$, cohérent avec ce qui est constaté.

L'écart peut s'expliquer avec les approximations des valeurs et du modèle, et avec le fait que la vitesse d'évaporation dépend du contenu de l'eau en électrolytes.

TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES DU GAZ PARFAIT

1. Dans le modèle du gaz parfait, les interactions entre molécules sont négligées.

(Si l'on connaît et pense à la loi correctrice de Van der Waals, le volume des molécules doit être également négligé).

2. cf cours : définition de H + définition des capacités avec les dérivées partielles de U et de H + fonctions d'état ne dépendant que de la température.

3. D'après le second principe, $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$, avec $S_{\text{cr}} = 0$ car la transformation est réversible, et $S_{\text{éch}} = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$ car elle est adiabatique. On en déduit que $\Delta S = 0$ qui conduit à la loi de Laplace $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$.

AN : On est en contrôle (T, V) ici, on adapte la loi de Laplace $T V^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$ en utilisant la loi du GP.

Donc $T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1} T_0 = 396 \text{ K} = 189^\circ \text{C}$.

4. Il s'agit de la pression sur la face extérieure de la frontière du système. Elle s'identifie à la pression P du système quand la transformation est réversible, car dans ce cas la pression doit être uniforme : un gradient de pression conduirait à de la diffusion de particules, phénomène par nature irréversible.

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \Leftrightarrow P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} \text{ donc } K = P_0 V_0^\gamma \text{ et } \beta = -\gamma.$$

PCSI2 2023/24 – DS n°6 (correction)

La transformation étant réversible, on a $W = - \int_{V_0}^V P(V) dV$. Le calcul donne naturellement, avec la bonne primitive : $W = \frac{1}{\gamma-1} P_0 V_0^\gamma (V^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma})$, puis le résultat demandé.

5. On a déjà $C_V T_0 = \frac{nR}{\gamma-1} T_0 = \frac{1}{\gamma-1} P_0 V_0$, puis grâce à la loi de Laplace en contrôle (T, V) ,

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma}. \text{ En remplaçant dans l'expression du travail : } W = C_V T_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) = C_V (T - T_0).$$

On reconnaît $W = \Delta U$, qui est bien le premier principe appliqué ici, vues les hypothèses, notamment l'hypothèse adiabatique : $Q = 0$.

La loi de Laplace est donc bien cohérente avec la conservation de l'énergie en adiabatique (si l'exposant du volume dans la loi $P(V)$ est différent de γ , Q sera non nulle sur la transformation).

6. On applique le résultat de la question précédente : $W = \Delta U = C_V (T - T_0)$ pour les deux transformations (premier principe qui ne suppose pas la réversibilité). La température finale est donc la même dans les deux cas.

On passe Laplace en contrôle (T, V) dans la variation d'entropie $\Delta S = C_V \ln \frac{T V^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}$.

Dans le cas de la transformation réversible, pour laquelle cette variation est nulle, on a $T V^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$.

Dans le cas de la transformation irréversible, pour laquelle $S_{\text{éch}} = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = 0$ encore, mais $S_{\text{cr}} > 0$, donc $\Delta S > 0$, on trouve (même température finale qu'avant) : $T V_{\text{irr}}^{\gamma-1} > T_0 V_0^{\gamma-1}$.

La combinaison des deux équations aboutit à $V_{\text{irr}}^{\gamma-1} > V_0^{\gamma-1}$. Comme $\gamma - 1 > 0$, on trouve bien que $V_{\text{irr}} > V = V_{\text{rév}}$.

Dans le cas d'une compression ($W > 0$) non réversible, il y a une surpression localisée au voisinage du piston par rapport au cas réversible pour lequel la pression est à tout instant uniforme. Les molécules résistent davantage à l'avancée du piston : pour un travail donné, celui-ci va moins loin que dans le cas réversible, la compression est moins efficace, et le volume final est plus grand.

Dans le cas d'une détente ($W < 0$), il y a un vide partiel au voisinage du piston (dans le système, qui le pousse), la force de pression étant plus faible que dans le cas réversible, le piston devra aller plus loin que dans le cas réversible, pour fournir le même travail, et on obtient à nouveau un volume final supérieur.

L'idée est ici d'expliquer, dans un cas simple (GP + adiabatique), pourquoi physiquement $S_{\text{cr}} > 0$ lors d'une transformation irréversible.

Q33. Un exemple de référentiel est le référentiel terrestre, ou « référentiel du laboratoire », lié au solide Terre supposé immobile. Il peut être considéré comme galiléen pour une expérience courte (inférieure à l'heure par exemple) dans laquelle les effets de la rotation terrestre ne se font pas sentir.

Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen l'est lui-même.

Q34. La masse M est répartie de façon équivalente sur quatre amortisseurs en parallèle, donc chaque amortisseur supporte une masse : $m = \frac{M}{4}$.

1 Suspension passive

1.1 Suspension sans amortissement

Q35. À l'équilibre, les différentes forces se compensent (première loi de Newton) :

$$\text{Poids : } \vec{P} = -mg\vec{e}_z \quad (10)$$

$$\text{Force de rappel : } \vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{e}_z \quad (11)$$

Donc à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = \vec{0} \Leftrightarrow -mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \Leftrightarrow l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \quad (12)$$

Q36. Le système est un oscillateur harmonique, de pulsation propre :

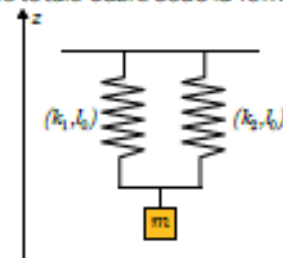
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

avec k la constante de raideur du ressort en kg.s^{-2} et m la masse en kg . La pulsation propre s'exprime en rad.s^{-1} (dimension T^{-1}).

On peut sinon retrouver ce résultat par une mise en équation simple avec un PFD.

Q37. Pour une association de deux ressorts en parallèle, on peut écrire la force totale subie sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= k_1(l - l_0)\vec{e}_z + k_2(l - l_0)\vec{e}_z \\ &= (k_1 + k_2) \times (l - l_0)\vec{e}_z \\ \vec{F} &= k_p(l - l_0)\vec{e}_z \end{aligned}$$



Donc on a bien additivité des raideurs : $k_p = k_1 + k_2$

Q38. Pour un véhicule à 4 roues, les quatre amortisseurs sont en parallèle, donc pour l'ensemble du véhicule, la raideur équivalente est :

$$k_v = 4k \quad (14)$$

Q39. Alors la pulsation propre de l'oscillateur constitué par le véhicule est :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_v}{M}} = \sqrt{\frac{4k}{4m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \quad (15)$$

1.2 Suspension avec amortissement

Q40. On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) sur le système masse m en référentiel galiléen, subissant les forces suivantes :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f$$

PCSI2 2023/24 – DS n°6 (correction)

En projection sur l'axe z :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg - k(l(t) - l_0) - h \frac{dz}{dt} \\ \text{avec } l(t) &= z(t) + l_0 - \frac{mg}{k} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg - k(z(t) + l_0 - \frac{mg}{k} - l_0) - h \frac{dz}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{k}{m} z(t) - \frac{h}{m} \frac{dz}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m} z(t) &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

avec par identification avec la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\partial z}{\partial t} + \omega_0^2 z(t) = 0\tag{17}$$

les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}\tag{18}$$

Q41. La valeur limite du facteur de qualité Q donnant lieu au régime critique est $Q = \frac{1}{2}$, ce qui correspond à une valeur limite de la raideur :

$$k_c = \frac{h^2}{2m}\tag{19}$$

Q42. D'après l'expression précédente, Q augmente avec la masse m . Donc une masse plus élevée (chargement du véhicule) permet au système de passer en régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

Q43. Le graphique présenté ci-dessous est un tracé de l'amplitude des oscillations (en mètres) en fonction de la fréquence d'excitation (en hertz).

Q44. La courbe correspondant à la masse la plus élevée est la courbe 4, qui correspond à la plus grande résonance, donc au facteur de qualité le plus élevé (régime pseudo-périodique).