

Étude thermodynamique d'un complexe piscine-patinoire

Données : Chaleur massique de l'eau liquide :

$$c_1 = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Chaleur massique de la glace :

$$c_2 = 2,09 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Chaleur latente massique de fusion de la glace sous la pression atmosphérique : $L = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Lors du fonctionnement, en régime stationnaire, d'une installation sportive (complexe piscine-patinoire) :

- la masse d'eau $m_1 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg}$ de la piscine est à la température uniforme $T_1 = 300,00 \text{ K}$;

- la masse d'eau $m_2 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ kg}$ de la patinoire est à la température uniforme $T_2 = 263,00 \text{ K}$.

On admettra que, sous la pression atmosphérique, le changement d'état eau liquide-glace se fait à une température $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

A • Préliminaire

Déterminer les capacités calorifiques C_1 , C_2 et C'_2 des masses d'eau de la piscine (C_1), de l'eau de la patinoire sous phase liquide (C_2) et de l'eau de la patinoire sous phase solide (C'_2).

A.N. : Calculer C_1 , C_2 et C'_2 .

B • Mise en température de la glace de la patinoire et de l'eau de la piscine

On considère une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible avec comme source froide l'eau de la patinoire et comme source chaude l'eau de la piscine.

À l'instant initial (qu'on choisira comme origine des dates) les deux masses d'eau (liquide) sont à la même température T_i .

On suppose que les sources n'échangent de la chaleur qu'avec la machine.

1 • Évolution des températures lorsque les deux masses d'eau restent liquides

À la date t , l'eau de la piscine est à la température $T_1(t)$ et celle de la patinoire à $T_2(t)$.

a. Établir l'équation différentielle qui lie $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

b. Intégrer cette équation entre l'instant initial et l'instant de date t .

c. Exprimer, en fonction de C_1 , C_2 , T_i et T_0 , la température T_3 de l'eau de la piscine lorsque la température de l'eau liquide de la patinoire est $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Exprimer en fonction de C_1 , C_2 , T_i , T_0 et T_3 , le travail, W_1 , échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_3 et W_1 . Donnée : $T_i = 280,00 \text{ K}$.

2 • Évolution des températures lorsque l'eau de la patinoire se transforme en glace

Exprimer, en fonction de C_1 , T_0 , T_3 , L et m_2 , la température T_4 de l'eau de la piscine lorsque toute l'eau de la patinoire est sous forme de glace à $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Exprimer, en fonction de C_1 , T_4 , T_3 , m_2 et L , le travail, W_2 , échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_4 et W_2 .

3 • Évolution des températures lorsque la glace de la patinoire se refroidit

a. Exprimer, en fonction de C_1 , C'_2 , T_2 , T_0 et T_4 , la température T_5 de l'eau de la piscine lorsque l'eau de la patinoire est sous forme de glace à $T_2 = 263,00 \text{ K}$.

Exprimer, en fonction de C_1 , C'_2 , T_4 , T_5 , T_0 et T_2 , le travail W_3 échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_5 et W_3 .

b. Exprimer, en fonction de C_1 , T_i et T_5 , l'énergie W_4 qu'il faut fournir à l'eau de la piscine pour élever la température par chauffage direct de T_i à T_5 .

A.N. : Calculer W_4 .

c. On dispose d'une puissance \mathcal{P} , supposée constante. Au bout de quelle durée τ la mise en température de l'ensemble sportif sera-t-elle réalisée ?

A.N. : Calculer τ (en jours, heures et minutes) avec :

$\mathcal{P} = 200 \text{ kW}$.