TD 28 – Ondes

1. Ondes progressives ou non ?

Les signaux sont modélisés par les fonctions suivantes (questions a et b), des coordonnées du point de l'espace et du temps. Dans chaque cas, s'agit-il d'ondes progressives ? Et si oui, quelles sont leurs caractéristiques ? (sens de propagation, célérité)

Toutes les grandeurs numériques qui ont une unité cachée sont dans le système international.

a) $s(x,t)=\dfrac{4}{\cosh^2(t+8x-5)}$

b) $s(x,t)=4\exp\left[\dfrac{-(x-2t)^2}{2}\right]$

c) $s(x,t)=3\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos(2t)$

2. Détection du monoxyde de carbone dans l'atmosphère

La fonction carbonyle se détecte grâce à un rayonnement électromagnétique « à $2170\ \mathrm{cm}^{-1}$ », ou assez proche, cela dépend un peu de l'environnement de la liaison.

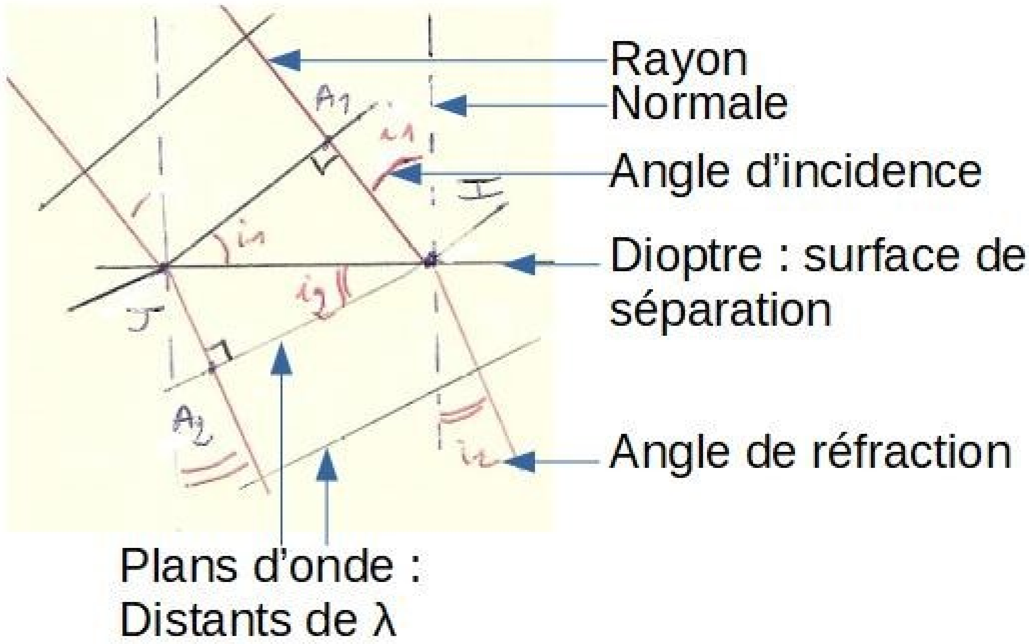
Sachant qu'on travaille dans le vide, obtenir toutes les propriétés de l'onde progressive utilisée.

3. Phase à l'origine des dates

Un signal sinusoïdal de fréquence $f=100\ \mathrm{Hz}$ de nature quelconque est généré par une source *S*.
On choisit la date telle que la phase à l'origine des dates soit nulle pour l'onde émise en *S*.
La célérité de l'onde dans le milieu est $c=1{,}5\ \mathrm{km/s}$. On s'intéresse à un point *M* situé à $D=50\ \mathrm{m}$ de *S* dans le sens de la propagation.

Calculer le retard temporel de l'onde en *M* et sa phase à l'origine des dates. La ramener dans le domaine $]-180°;+180]$.

4. Loi de la réfraction de Snell-Descartes



On travaille à petite échelle, celle de la longueur d'onde : à cette échelle, le dioptre, surface séparant les deux milieux, peut être assimilé à un plan, et les rayons incidents assimilés à des droites parallèles entre elles.

On note avec un indice 1 tout ce qui concerne le milieu d'incidence : n_1, v_1, λ_1 sont respectivement son indice optique, la célérité de l'onde dans ce milieu, et la longueur d'onde.

L'indice 2 est associé au milieu d'émergence.

On note *c* la célérité de la lumière dans le vide.

On cherche à démontrer la loi de la réfraction.

a) Obtenir deux expressions de la distance IJ (l'une avec les indices 1, l'autre avec les indices 2, en fonction de la longueur d'onde dans le milieu et de l'angle du rayon avec la normale).

b) En déduire la relation de la réfraction, exprimée en fonction (seulement) des angles et des célérités : cette relation est valable pour toute onde, même élastique, et ne nécessite pas de notion d'indice du milieu.

c) Rappeler la définition de l'indice optique et en déduire la version optique, familière, de la loi de la réfraction.

5. Ondes dans un plasma

On peut démontrer, par une étude électromagnétique (voir spé), que les ondes transversales dans le plasma vérifient l'équation dite de dispersion suivante :

$$k^2 c_0^2 = \omega^2 - \omega_P^2$$

où $c_0 = 2{,}99 \cdot 10^8$ m/s est la célérité de lumière dans le vide et ω_P est appelée pulsation plasma, constante caractéristique du milieu, dépendant de la densité électronique.

Les ondes peuvent se propager dans le plasma lorsqu'il est possible de calculer leur longueur d'onde à partir de la relation de dispersion.

a) Pour quelles valeurs de leur pulsation ω, comparée à ω_P, les ondes se propagent-t-elles dans le plasma ?

b) Calculer la célérité *c* des ondes qui se propagent, en fonction de c_0, ω_P et ω, mais pas de *k*.

   Étudier cette fonction de ω et tracer l'allure de la courbe. Que peut-on dire de *c* par rapport à c_0 ? N'est-ce pas étrange ?

c) En réalité, l'information transportée par les ondes se déplace à la vitesse dite de groupe définie par $v = \frac{d\omega}{dk}$. Calculer *v* en fonction de c_0, ω_P et ω, mais pas de *k*. Conclure.

6. Indice d'un verre

On considère un verre optique d'indice n.

On lui envoie une lumière monochromatique de fréquence f : on note λ_0 sa longueur d'onde dans le vide et λ celle dans le verre d'indice n.

La célérité de la lumière dans le vide est notée c.

Le verre (comme tous les milieux transparents) vérifie dans le domaine visible la loi de Cauchy $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ où A,B sont des constantes positives caractéristiques du matériau.

a) Obtenir la relation entre λ, λ_0 et n.

b) Travailler sur la loi de Cauchy pour obtenir l'expression de la célérité *v* de l'onde dans le verre en fonction de sa fréquence *f*.

c) Obtenir la relation de dispersion du verre.

7. Écoute musicale partagée

Chloé écoute à plein volume de la musique dans sa chambre. Son frère Hugo est dans la sienne, à côté de celle de Chloé, et la porte de séparation de largeur $L = 80\,\text{cm}$ est grande ouverte.

La célérité du son dans l'air est $c = 340\,\text{m/s}$.

a) Justifier que quelle que soit la position de Hugo dans sa chambre, il entend parfaitement les basses. Dans quel domaine spectral (fréquentiel) exactement ?

b) Hugo se trouve dans sa chambre au point de coordonnées $(x = L\ ;\ y = L)$ avec $L = 3\,\text{m}$, où l'axe *x* fait face à la porte, l'axe *y* est parallèle à la cloison et l'origine est au centre de la porte.

   Quelle est la fréquence que Hugo n'entend pas du tout ? quel domaine spectral entend-il très mal ?

8. Hauts-parleurs linéaires

On considère deux hauts-parleurs placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre, émettant des ondes sonores progressives sinusoïdales à la même fréquence $f=20000\,\text{Hz}$.

L'amplitude commune des ondes sonores est $p=3\,\text{Pa}$, et leur phase à l'origine des dates est nulle.

La célérité du son dans l'air est $c=340\,\text{m/s}$.

a) Calculer la longueur d'onde λ de ces ondes sonores en centimètres.

L'un des hauts-parleurs est placé selon la demi-droite $[Ox)$, l'autre selon la demi-droite $[Oy)$. La zone d'interférence, où les ondes sonores s'ajoutent, est donc le quart de plan $[Oxy)$.

Les hauts-parleurs sont supposés infiniment étendus dans le modèle simplifié : ils occupent la totalité des demi-droites.

b) Faire un schéma.

   Pour quels points *M* de la zone d'interférences la différence entre les chemins parcourus par les deux ondes est-elle nulle ? que peut-on dire des interférences en ces points ? qu'y vaut l'amplitude de l'onde sonore ?

   Pour obtenir la distance d'un point à une source, on prendra simplement sa distance à l'un des axes.

c) Compléter le schéma à l'échelle : représenter en rouge tous les points de la zone d'interférence tels que les interférences sont constructives, et en vert ceux où les interférences sont destructives.

On considère le point *P* de coordonnées $P(x_P=5{,}10\,\text{cm}\,;\,y_P=2{,}40\,\text{cm})$.

d) Placer ce point sur le schéma. Obtenir l'amplitude p_P de l'onde sonore en *P* et sa phase à l'origine des dates φ_P en degrés (dans l'intervalle $]-180\,°\,;+\,180]$).

e) Par analogie avec la lumière, on parle de *franges brillantes* là où le signal est maximal et de *franges sombres* là où il est minimal.

   On définit l'interfrange *d* comme la distance séparant deux franges brillantes successives, ou deux franges sombres successives.

   Calculer *d* en centimètres.

9. Tension d'une corde

Une corde de longueur $L=50\,\text{cm}$ est mise en vibration. La célérité des ondes sur la corde est *c*, constante. On peut démontrer que cette dernière est égale à $c=\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, où

- *F* est la tension de la corde, c'est-à-dire la force qu'elle exerce sur les points où elle est accrochée ;
- μ est sa masse linéique, où masse par unité de longueur.

  Pour cette corde, $\mu=100\,\text{g/m}$

Pour exercer cette tension, on accroche l'une des extrémités de la corde au plafond, et l'autre à une masse *M*.

a) Calculer *M* pour obtenir un son fondamental de hauteur $f=80\,\text{Hz}$.

   Aide : Même pendant la vibration, on peut supposer la masse immobile – il faut faire un peu de mécanique concernant *M*.

b) Vérifier que la masse de la corde est négligeable par rapport à *M*.

10. Corde de piano

Par une étude mécanique, on peut établir la relation de dispersion d'une corde de piano $\mu\omega^2 = Fk^2 + E\frac{\pi r^4}{4}k^4$

où k est la pulsation spatiale de l'onde harmonique progressive, ω sa pulsation temporelle, μ est la masse linéique de la corde, F sa tension, r son rayon, et E une constante caractéristique du matériau de la corde mesurant son élasticité.

Première étude : le second terme à droite est négligeable – on ne prend pas en compte le terme d'élasticité.

a) Retrouver que la célérité des ondes sur la corde s'exprime par $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. La corde est-elle un milieu dispersif ?

b) On numérote les modes de vibration de la corde par un entier p positif non nul.

Obtenir l'expression de la fréquence f_p produite par la corde vibrant dans le mode p, en fonction de p, c_0 et de sa longueur L.

c) Lorsque la corde est frappée par le marteau, tous les modes de vibration sont présents. Le son obtenu est-il périodique ?

Seconde étude : on prend en compte le terme d'élasticité.

d) Obtenir l'expression de la célérité des ondes en fonction des constantes, et de k.

e) On suppose que la corde vibre dans le mode p. En déduire l'expression de la célérité en fonction des constantes, de L et de p. La corde est-elle un milieu dispersif ?

f) Montrer qu'on peut écrire $f_p = p\frac{c_0}{2L}\sqrt{1+Bp^2}$, où B est une constante qu'on exprimera en fonction de r, E, L et F.

Le son produit lorsque la corde est frappée est-il parfaitement musical ?

11. Autre calcul de l’onde stationnaire (point de vue de spé)

On peut partir du fait qu’une onde stationnaire harmonique (un seul mode de vibration) est la multiplication de deux sinusoïdes, temporelles et spatiales, donc s’écrire sous la forme très générale $s(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$, où l’on force l’amplitude $A > 0$, mais où les angles ont des valeurs a priori quelconques.

L’objectif du calcul est de se rapprocher de l’expression du cours, bien plus parlante physiquement, puisque ventres et nœuds se trouvent aisément à partir de cette dernière.

L’onde s présente un nœud de vibration en $x = 0$.

a) Quelle « expression du cours » ?

b) Donner l’expression de $s(0,t)$ à partir de celle fournie. Quelles sont alors les valeurs possibles pour ψ imposées par l’existence du nœud ? A-t-on une contrainte sur la valeur de φ ?

c) En déduire l’écriture simplifiée de $s(x,t)$ qui devrait commencer par $\pm A$ ...

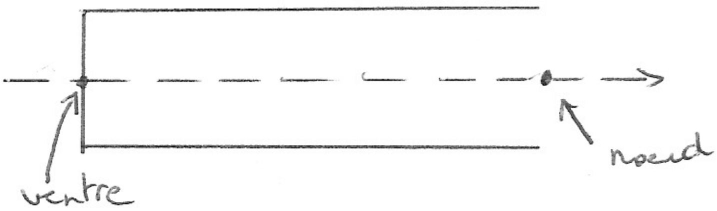
d) Comment obtenir une forme sans signe - ?

e) Comment obtenir la forme du cours ?

12. Instrument à vent

L'onde sonore est une légère modification de pression par rapport à la pression atmosphérique P_0 qui se propage : la pression de l'air varie entre P_0+p et P_0-p où *p* est l'amplitude de l'onde sonore.

Dans un tuyau d'instrument à vent, l'onde présente un nœud à l'extrémité ouverte et un ventre à l'extrémité fermée :



a) Le tuyau vibre dans son premier mode : l'onde présente le moins de fuseaux possibles.

   Reproduire et compléter le schéma en représentant l'allure de l'onde stationnaire dans le tuyau (fuseau).

   Quelle est alors la relation entre la longueur d'onde λ et la longueur L du tuyau ?

b) Quelle est la longueur du tuyau d'orgue permettant d'obtenir le son le plus grave audible par l'homme, $f_1=20\,\text{Hz}$, sachant que la célérité du son dans l'air est $c=330\,\text{m/s}$, constante ?

c) On numérote les modes de vibration par un indice *n*, entier naturel non nul ($n=1$ dans les questions a et b).

   Représenter le mode 2 de vibration, puis généraliser : obtenir la relation entre L, n et λ.

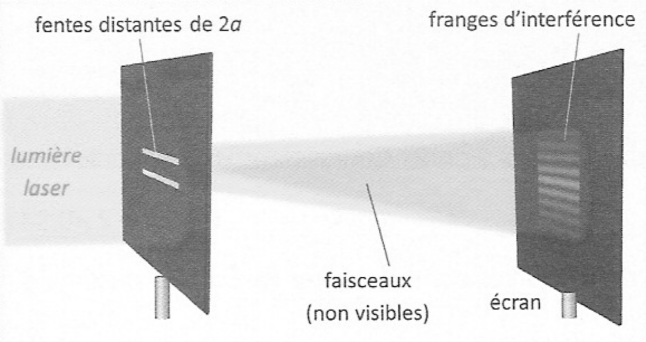
d) Calculer la fréquence f_n produite par le mode *n*.

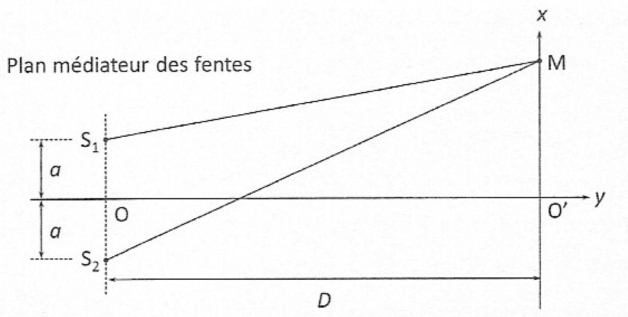
e) Justifier que le son produit par l'ensemble des modes est musical mais ne contient que des harmoniques impairs.

13. Trous d'Young

En 1802, l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférence lumineuse. Une version moderne de cette expérience consiste à éclairer avec une lumière laser de longueur d'onde λ deux fentes parallèles distantes de $2a$ et d'épaisseur très inférieure à $2a$. Sur un écran situé à une distance $D >> a$, on recueille la lumière qui a traversé les trous. On fait l'hypothèse que le problème est invariant selon la direction des fentes et on travaille dans le plan médiateur plan (Oxy) de ces dernières. On note S_1 et S_2 les points des fentes appartenant à ce plan et O le milieu de ces points. L'axe Oy est perpendiculaire au plan contenant les fentes, l'axe $O'x$ se trouve sur l'écran, perpendiculaire à Oy. On obtient la figure interférentielle ci-dessous.

On donne : $\lambda = 633$ nm et $D = 1{,}20$ m





1. Quel est le phénomène responsable de l'étalement de la lumière ? Estimer l'ordre de grandeur de la largeur l des fentes à partir de la figure d'interférence.

2. Pour justifier la présence de franges d'interférence sur l'écran, on assimile les ondes lumineuses émises par les points S_1 et S_2 à des ondes cylindriques (donc circulaires dans le plan de l'étude) sinusoïdales. Quelle simplification apporte l'inégalité $D >> a$?

3. Qu'observe-t-on au point central O' de la figure d'interférence ?

4. On examine maintenant l'intensité lumineuse en point M de l'écran distant de x_M du point O'.

4.a. Exprimer la différence de marche δ entre les trajets des deux ondes parvenant en M.

4.b. Donner une approximation de cette différence de marche en utilisant la relation approximative :

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} \approx 1+\frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{si} \quad \varepsilon \ll 1$$

4.c. En déduire le déphasage entre les deux ondes au point M. Préciser le lieu des points correspondant à un maxima d'intensité, puis celui des minima.

4.d. Estimer la distance $2a$ séparant les fentes à partir de la figure d'interférence.