À lire avec soin avant de commencer :
On demande d'encadrer les résultats littéraux en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.
De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.
Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision, sauf si indication contraire.

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Les trois parties sont indépendantes.

I – L'atmosphère : une machine thermique ? – 9 pts

D'après Agrégation interne de physique 2023

Généralités sur les moteurs thermiques dithermes

On considère une machine thermique ditherme dans laquelle un fluide parcourt de manière cyclique différents organes (compresseur, détenteur, etc). Il n'échange du transfert thermique qu'au contact de deux thermostats de températures T_c (source chaude) et T_f (source froide), avec $T_c > T_f$. On note W le travail reçu par le fluide sur un cycle, Q_c et Q_f les transferts thermiques reçus de la part respectivement de la source chaude et de la source froide.

Q1. **Établir** une relation entre W, Q_c et Q_f.

Q2. Par un bilan d'entropie, **établir** l'inégalité de Carnot-Clausius.

On ne s'intéresse dans la suite qu'à des machines motrices.

Q3 . On considère un moteur ditherme réversible. **Indiquer** quelles sont nécessairement les natures des transformations suivies par le fluide. **Définir** et **établir** l'expression du rendement η_C (rendement de Carnot) d'une telle machine motrice en fonction de T_c et T_f.

Q4 . On considère maintenant une machine motrice non réversible. **Montrer** que son rendement est majoré par le rendement de Carnot.

Modèle de Curzon et Ahlborn

Dans un article de 1975, Curzon et Ahlborn[3] ont proposé un modèle de machine thermique ditherme permettant de prendre en compte la limitation du rendement liée à la vitesse à laquelle les transferts thermiques avec les sources peuvent prendre place.
Pour cela on introduit deux résistances thermiques R_{th} identiques entre les sources et le fluide. On note T_1, respectivement T_2, la température du fluide au contact de la source chaude (de température T_c), respectivement froide (de température T_f), par l'intermédiaire de la résistance thermique R_{th} (cf. figure 12).
Le cycle décrit par le fluide est constitué de deux transformations adiabatiques et deux transformations isothermes (aux températures T_1 et T_2). On suppose que chaque transformation isotherme a une durée τ, et que les durées des transformations adiabatiques sont négligeables devant τ.

3. F. L. Curzon and B. Ahlborn, « Efficiency of a Carnot engine at maximum power output », *American Journal of Physycs* 43, 22 (1975)

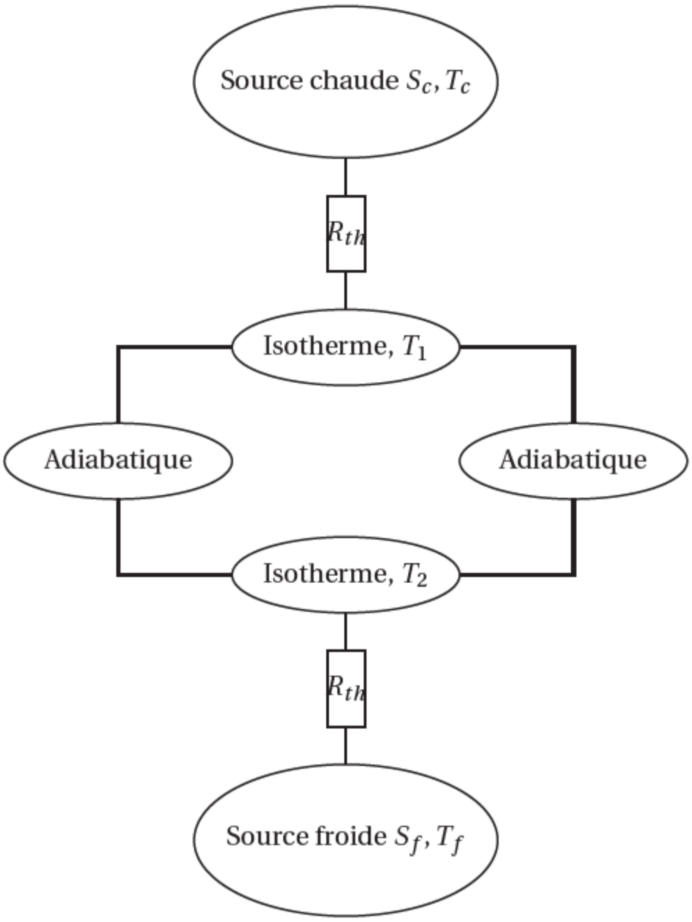


FIGURE 12 – Modèle de machine thermique selon le modèle de Curzon et Alhbron

On rappelle que la notion de résistance thermique R_{th} , valable uniquement en *régime stationnaire*, donc quand les températures sont indépendantes du temps, relie l'écart de température ΔT (en degrés Kelvin ou Celsius) entre deux systèmes avec la puissance thermique P_{th} qu'ils échangent, énergie échangée par unité de temps (en watts).

La loi est analogue à celle vérifiée par un conducteur ohmique en électrocinétique, reliant la différence de potentiel avec le courant : $U=RI$ devient dans ce contexte thermodynamique $\boxed{\Delta T=R_{th}P_{th}}$.

Q5. **Exprimer** en fonction de T_1, T_2, T_c, T_f, R_{th} et τ les transferts thermiques Q_c et Q_f reçus par le fluide de la part de la source chaude et de la source froide au cours d'un cycle.

Q6. **Exprimer** en fonction de T_1, T_2, T_c, T_f et R_{th} la puissance mécanique $\mathscr{P}_m$ fournie par la machine thermique.

On admet que le rendement est maximal lorsque la condition $\dfrac{T_c-T_1}{T_1}+\dfrac{T_f-T_2}{T_2}=0$ est satisfaite. On pose $\alpha=\dfrac{T_1}{T_c}$ et $\beta=\dfrac{T_f}{T_c}$ et on admet que $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

Q7. Justifier la phrase ci-dessus : quelle est la grandeur physique qui est nulle ? pourquoi doit-elle l'être dans le cas d'une machine idéale ?

Q8. **Établir** la relation $\mathscr{P}_m = \dfrac{T_c}{R_{th}}\left(1-\alpha+\beta-\dfrac{\beta}{2-\dfrac{1}{\alpha}}\right)$.

On raisonne en général à températures T_f et T_c des sources fixées.

Q9. **Déterminer** dans ces conditions la valeur numérique du rapport α permettant d'avoir la plus grande puissance motrice.

Q10. **Montrer** alors que la puissance motrice maximale correspondante est donnée par :

$$\mathscr{P}_{m,\max} = \frac{T_c}{2R_{th}}\left(1-\sqrt{\beta}\right)^2$$

Q11. **Établir** alors que, dans les conditions optimales, le rendement du système vaut $1-\sqrt{\beta}$.
Commenter: en quoi ce résultat répond-il aux objectifs du papier de Curzon & Ahlborn ?

Application

On modélise l'atmosphère comme un moteur thermique fournissant de la puissance mécanique aux vents. La source chaude est constituée par le rayonnement solaire dont la puissance surfacique moyenne, également répartie sur toute la surface terrestre, est de l'ordre de $2\times10^2\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.
Les températures moyennes valent : 290 K au niveau du sol et 220 K au sommet de l'atmosphère.

Q12. **Estimer** la puissance mécanique maximale susceptible d'être fournie aux masses atmosphériques.
On donnera le résultat en kW/km² de surface terrestre.

II – Estimation de la pression au centre de la Terre – 6,25 pts

Pour cette estimation, on considère le modèle simplifié d'une Terre assimilée à une boule de fluide homogène, donc de masse volumique μ uniforme.

Des modèles plus précis, basés sur la mesure de la densité terrestre en fonction de la profondeur grâce aux ondes sismiques, aboutissent à une estimation du même ordre de grandeur, mais nettement plus élevée.

On démontre, dans ce modèle simplifié, que le champ de gravitation $\vec{g}(r)$ à l'intérieur de la Terre, en tout point M, dépend de la distance $r=OM$ entre M et le centre O de la Terre, de façon <u>linéaire</u> : il est nul au centre de la Terre et sa norme croît avec r pour atteindre $g_0=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ sur la surface terrestre, donc en $r=R_T$, rayon terrestre.

Données :

- Champ de pesanteur au sol : $g_0=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$
- Constante universelle de la gravitation : $G=6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}$
- Volume d'une boule de rayon R : $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$
- Gradient en coordonnées sphériques d'un champ scalaire X quelconque : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(X)\cdot\vec{e}_r=\dfrac{\partial X}{\partial r}$

Allure du champ gravitationnel

Q1. Sur **<u>l'annexe à rendre avec la copie</u>, représenter** les vecteurs champ gravitationnel $\vec{g}_A$ et $\vec{g}_B$, respectivement aux points A et B sur le schéma, en prenant comme échelle 2 (grands) carreaux pour la valeur de g_0.

Q2. Déduire de la linéarité de son évolution l'expression du vecteur $\vec{g}(r)$ en fonction de g_0, R_T, r et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ appartenant à la base des coordonnées sphériques.

Statique des fluides

On démontre que, dans un champ de pression quelconque $p(M)$, la force de pression par unité de volume exercée sur un corps de volume élémentaire dV s'exprime par $\vec{f}_{p,vol}=\frac{1}{dV}\vec{F}_p=-\overrightarrow{\text{grad}}(p)$.

Q3. Démontrer que la loi de la statique des fluides s'exprime alors par $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(p)=\mu\vec{g}}$, où μ est la masse volumique du fluide et $\vec{g}$ le champ de pesanteur au point considéré.

Pression à l'intérieur de la Terre

Q4. Avec la donnée de la loi de la statique et le modèle utilisé, **obtenir** l'expression de la pression p en tout point intérieur à la Terre, en fonction de μ, r, g_0, R_T, p_0 pression au centre de la Terre.

Q5. Avec une approximation qu'on précisera, **obtenir** l'expression de p_0 en fonction de μ, g_0 et R_T.

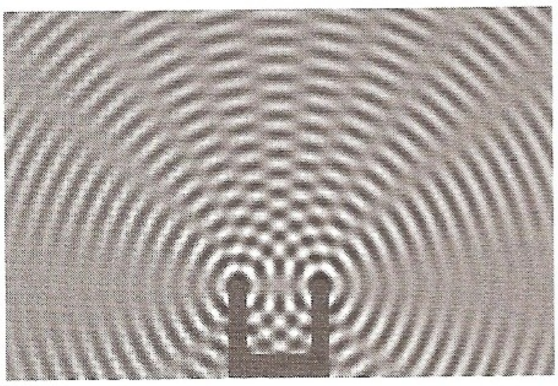
En déduire son expression en fonction de g_0 et G seulement.

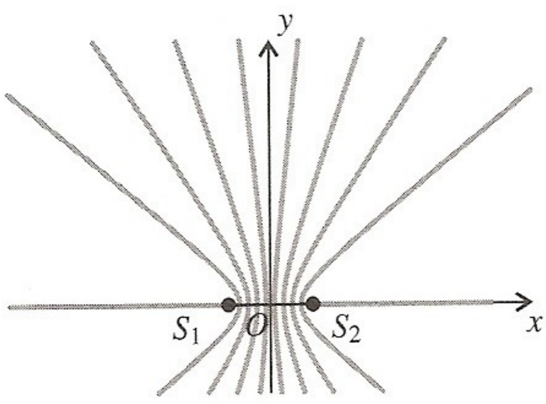
Q6. Vérifier cette dernière expression par analyse dimensionnelle, en utilisant impérativement les symboles dimensionnels de base M, L et T.

(Si le calcul final de la question précédente n'a pas abouti, faire l'analyse dimensionnelle sur la première expression obtenue).

Q7. Application numérique, en pascals, puis en Mbars.

III – Interférences sur une cuve à ondes – 4,75 pts





La figure ci-dessus représente une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. Deux pointes distantes de a frappent en même temps, à intervalles réguliers, la surface de l'eau, générant deux ondes qui interfèrent. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et foncée là où elle est concave. L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée.

1. On suppose pour simplifier que des ondes sinusoïdales partent des deux points S_1 et S_2 où les pointes frappent la surface. En notant λ la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point M situé aux distances d_1 et d_2 respectivement de S_1 et S_2, soit destructrice. Cette condition fait intervenir un entier m.

2. Pour chaque entier m le lieu des points vérifiant cette condition est une courbe que l'on appelle dans la suite ligne de vibration minimale. Les lignes de vibration minimale sont représentées sur la figure de droite : ce sont des hyperboles

Les parties $x < -\frac{a}{2}$ et $x > \frac{a}{2}$ de l'axe (Ox) sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur $\frac{a}{\lambda}$.

3. Expliquer pourquoi l'image est bien contrastée au voisinage de l'axe (Oy).

4. On observe sur la figure que les zones claires et sombres sont alternées en opposition de phase de part et d'autre d'une ligne de vibration minimale. Le but de cette question est de comprendre pourquoi.

a. On suppose la phase initiale de chacune des ondes nulle à la source. Exprimer les phases Φ_1 et Φ_2 en M des ondes 1 et 2 provenant respectivement des sources S_1 et S_2. En déduire la phase moyenne en M, $\Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$, en fonction de f, t, d_1, d_2 et λ.

b. On se place en un point M d'une ligne de vibration minimale (L). Représenter les vecteurs de Fresnel correspondant aux ondes 1 et 2 en M.
On prendra pour le schéma Φ_1 quelconque, et des amplitudes des ondes très voisines.
Exprimer Φ en fonction Φ_1, et justifier que le résultat est écrit modulo π.
Faire apparaître sur la figure la phase moyenne Φ en prenant arbitrairement $\Phi > \Phi_1$.

c. Que devient cette figure si l'on se place en un point M' proche de M, du même côté de (L) que la source S_1 ? On supposera que Φ a la même valeur en M et M', et que les amplitudes des ondes n'ont pas changé.
Même question pour un point M'' situé du même côté de (L) que la source S_2.

d. Que peut-on dire des vibrations résultantes en M' et M'' ? On supposera pour simplifier que les deux ondes ont la même amplitude.

FIN

Annexe à rendre avec la copie **NOM, Prénom :**

Partie II