

L'ATMOSPHÈRE : UNE MACHINE THERMIQUE ?

Q3. Si la machine est réversible, alors toutes les transformations doivent l'être :

- si elles sont adiabatiques, pas de problème ;
- s'il y a contact avec un thermostat, elles doivent alors être isothermes : si elles ne sont que monothermes, il y aura une température intérieure non uniforme, et donc de la diffusion thermique source d'irréversibilité.

Il existe des cycles machines idéaux construits avec des isochores ou des isobares réversibles. Mais dans ce cas, la température doit varier infiniment lentement sur ces étapes : ces machines ne sont alors pas dithermes (il n'y a pas que deux températures extérieures mais une évolution continue, le calcul de l'entropie échangée se complique) et les expressions de Carnot pour les efficacités ne s'appliquent donc pas.

Conclusion : une machine ditherme réversible a un cycle constitué uniquement d'adiabatiques réversibles et d'isothermes à T_c et à T_f .

Q5. Le transfert thermique issu de la source chaude est entrant dans le système, ce qui impose $T_1 < T_c$, donc

$$Q_c = (T_c - T_1) \frac{\tau}{R_{th}} \quad (\text{car } P_{th,c} = \frac{Q_c}{\tau}), \text{ qui est bien positif.}$$

De même, Q_f est sortant du moteur, donc $T_f < T_2$: $Q_f = (T_f - T_2) \frac{\tau}{R_{th}}$, qui est bien négatif.

Q6. On demande la puissance mécanique fournie, positive, et par définition opposée à celle reçue :

$$P_m = -\dot{W} = \dot{Q}_c + \dot{Q}_f = \frac{1}{R_{th}} [T_c + T_f - (T_1 + T_2)].$$

Q7. On reconnaît $\frac{R_{th}}{\tau} \left(\frac{Q_c}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} \right) = \frac{R_{th}}{\tau} S_{ech}$, où S_{ech} est l'entropie échangée par le fluide moteur, puisque les températures de contact du fluide avec l'extérieur, là où se produisent les échanges thermiques, sont respectivement T_1 et T_2 .

Comme en régime cyclique (ou établi) la variation d'entropie ΔS est nulle, et comme le rendement sera maximal pour une création d'entropie nulle, le second principe conduit à $\Delta S = 0 = S_{ech} + 0$.

Q8. On voit apparaître en factorisant T_c , assez simplement : $P_m = \frac{T_c}{R_{th}} \left(1 + \beta - \alpha - \frac{T_2}{T_c} \right)$, où il faut exprimer le dernier terme.

La condition sur l'entropie échangée est équivalente à $\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} = 2$, donc $\frac{1}{\alpha} + \frac{T_f}{T_c} \frac{T_c}{T_2} = 2$ soit $\frac{1}{\alpha} + \beta \frac{T_c}{T_2} = 2$, ce qui donne $\frac{T_c}{T_2} = \frac{1}{\beta} \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right)$: son inverse est bien le terme manquant #

Q9. La question indique que β est fixé ici : P_m est fonction de la variable α seulement.

Pour trouver son extremum, on cherche donc le zéro de sa dérivée par rapport à α .

Il n'est pas du tout évident que la dérivée soit plus simple en mettant tout au même dénominateur ; on utilise la composition des dérivées :

$$\frac{dP_m}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\beta}{\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\beta}{(2\alpha - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = \sqrt{\beta} \quad \text{car } \alpha > \frac{1}{2}. \quad \text{Finalement } \boxed{\alpha = \frac{1 + \sqrt{\beta}}{2}}.$$

Q10. Le dernier terme peut s'écrire $\frac{\alpha\beta}{2\alpha - 1}$, et l'on a déterminé que $2\alpha - 1 = \sqrt{\beta}$: il vaut donc $\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta}} = \alpha\sqrt{\beta}$.

Donc $P_{m,max} = \frac{T_c}{R_{th}} \left(1 + \beta - \frac{1 + \sqrt{\beta}}{2} - \frac{1 + \sqrt{\beta}}{2} \sqrt{\beta} \right)$ soit $P_{m,max} = \frac{T_c}{2R_{th}} (2 + 2\beta - 1 - \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} - \beta) = \frac{T_c}{2R_{th}} (1 - 2\sqrt{\beta} + \beta)$, identité remarquable #

Q11. Par définition de l'efficacité (version puissance), on a $e = \frac{P_m}{\dot{Q}_c} = \frac{T_c}{2R_{th}} (1 - \sqrt{\beta})^2 \frac{R_{th}}{T_c - T_1}$, donc $e_{max} = \frac{1}{2} \frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{1 - \alpha}$.

Or $1 - \alpha = 1 - \frac{1 + \sqrt{\beta}}{2} = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{2}$, donc $\frac{1}{1 - \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{\beta}}$ #

On a obtenu l'efficacité de Carnot : $e_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \beta$, avec $0 < \beta < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\beta} < 1$, en prenant la racine de l'inéquation.

En multipliant par $\sqrt{\beta}$, on trouve $\beta < \sqrt{\beta} \Leftrightarrow -\beta > -\sqrt{\beta}$: $e_c > e_{max}$ (en ajoutant 1).

L'introduction des résistances thermiques, qui modélise la faible vitesse des transferts thermiques, conduit bien à une diminution de l'efficacité d'un moteur ditherme, même idéal.

Q12. Par définition de l'efficacité maximale, on $P_{m,max} = e_{max} \dot{Q}_c$. En notant avec des minuscules les grandeurs par unité de surface du sol, on a $p_{m,max} = e_{max} \dot{q}_c$:

$$p_{m,max} = (1 - \sqrt{220/290}) \times 2 \times 10^2 \text{ W/m}^2 = 26 \text{ W/m}^2 = 26.000 \text{ kW/km}^2 \quad (1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2).$$

ESTIMATION DE LA PRESSION AU CENTRE DE LA TERRE

Q1. Le champ gravitationnel est partout radial et dirigé vers le centre de la Terre.

Sa norme est g_o en A, et elle est proportionnelle par linéarité avec r : elle est donc 2 fois plus faible en B.

Q2. La linéarité donne que $g = kr$, qu'on applique à la surface terrestre : $g_o = k R_T$, d'où la valeur de k , puis l'expression :

$$\vec{g}(r) = -g_o \frac{r}{R_T} \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r \text{ étant radial centrifuge.}$$

Q3.

Référentiel : terrestre, galiléen

Système : volume infinitésimal dV de fluide dans le fluide

Contrainte : immobilité car statique

BDF : Poids $d\vec{P} = dm \vec{g}$; Forces de pression $d\vec{F}_p = -\text{grad}(p) dV$, où dm est la masse du système.

RFD : $dm \vec{a} = \vec{0} = d\vec{F}_p + d\vec{P}$ avec $dm = \mu dV$

Donc $-\text{grad}(p) dV + \mu dV \vec{g} = \vec{0}$: $\text{grad}(p) = \mu \vec{g}$

Q4. La pression p ne dépendant que de r , la dérivée partielle dans le gradient devient une dérivée ordinaire, la projection de la loi sur \vec{e}_r donne $\frac{dp}{dr} = -\mu g$, donc ici (c'est g qui est variable, et pas μ) : $p'(r) = -\frac{\mu g_o}{R_T} r$.

On l'intègre, avec comme condition initiale p_o , qui est précisément la pression cherchée au centre de la Terre :

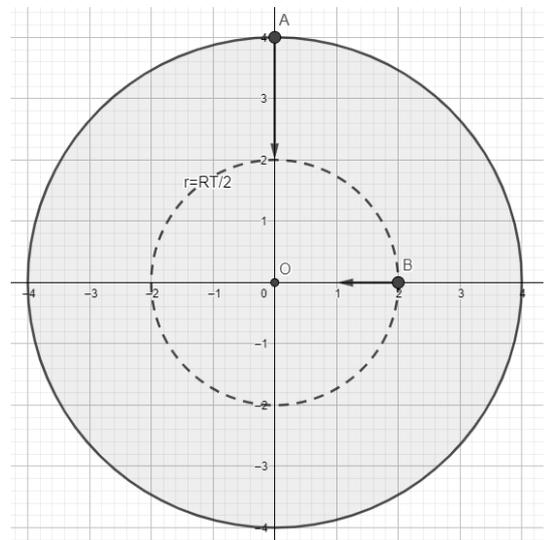
$$p(r) = p_o - \frac{\mu g_o r^2}{2 R_T}$$

Q5. En $r = R_T$, on obtient : $p_{atm} = p_o - \frac{\mu g_o}{2} R_T$, pression atmosphérique, clairement négligeable devant p_o :

$$p_o = \frac{\mu g_o R_T}{2}$$

Par définition de la masse volumique, on a $\mu = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3}$, ce qui conduit à $p_o = \frac{3 g_o M_T}{8 \pi R_T^2}$.

En exprimant la norme du champ gravitationnel à la surface terrestre, on obtient la célèbre relation entre les 4 constantes : $G M_T = g_o R_T^2$ soit $\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{g_o}{G}$, et finalement $p_o = \frac{3 g_o^2}{8 \pi G}$.



Q6.

Dimension de la pression : $[p_o] = \frac{[\vec{F}_p]}{[surface]}$, avec $[\vec{F}_p] = [m \vec{a}] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, donc $[p_o] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

Dimension de G : d'après l'énoncé (son unité est donnée), $[G] = [force] \cdot L^2 \cdot M^{-2} = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$

La dimension à droite de l'égalité est donc $(L \cdot T^{-2})^2 \cdot (M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2})^{-1} = M^1 \cdot L^{2-3} \cdot T^{-4+2}$.

On retrouve $[p_o]$: c'est homogène.

Q7. On obtient $p_o = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 1,76 \cdot 10^6 \text{ bars} = 1,76 \text{ Mbars}$.

Le modèle plus précis qui prend en compte l'augmentation de la densité terrestre avec la profondeur donne une valeur de pression environ 2 fois supérieure.

INTERFÉRENCES SUR UNE CUVE À ONDES

1. Comme les pointes frappent en même temps la surface de l'eau, les phases à l'origine des dates aux sources sont identiques (on peut les prendre nulles).

On a alors la différence de marche qui doit un nombre entier de demies longueurs d'onde : $d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$, pour obtenir une interférence exactement destructive.

2. Pour un point M situé sur $[S_2 x]$, la différence de marche est évidemment a ; la condition précédente conduit à $a = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$, donc $\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2} + m$, c'est donc un demi entier (positif bien sûr).

Faire l'étude sur la demi-droite de l'autre côté n'apporte rien de plus.

3. Au voisinage de l'axe (Oy), les amplitudes des ondes qui arrivent en M sont presque identiques, car les distances qu'elles parcourent sont presque les mêmes : l'interférence constructive donne alors une amplitude double et l'interférence destructive une amplitude quasi nulle.

Loin de l'axe, ce n'est plus vrai, car l'amplitude des ondes diminue en fonction de la distance parcourue entre la source et le point considéré : les distances étant très différentes, la destruction ne sera plus du tout totale.

4.a. D'après l'équation de l'OPH, on a $\Phi_1 = \omega t - k d_1$, puisque la phase à l'origine à la source $\phi_{o1} = 0$.

La phase moyenne est donc $\Phi = \omega t - \frac{k}{2}(d_1 + d_2)$, donc $\Phi = 2\pi f t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)$

4.b. On se trouve sur une ligne minimale : les vecteurs de Fresnel sont de sens opposés.

On en déduit que

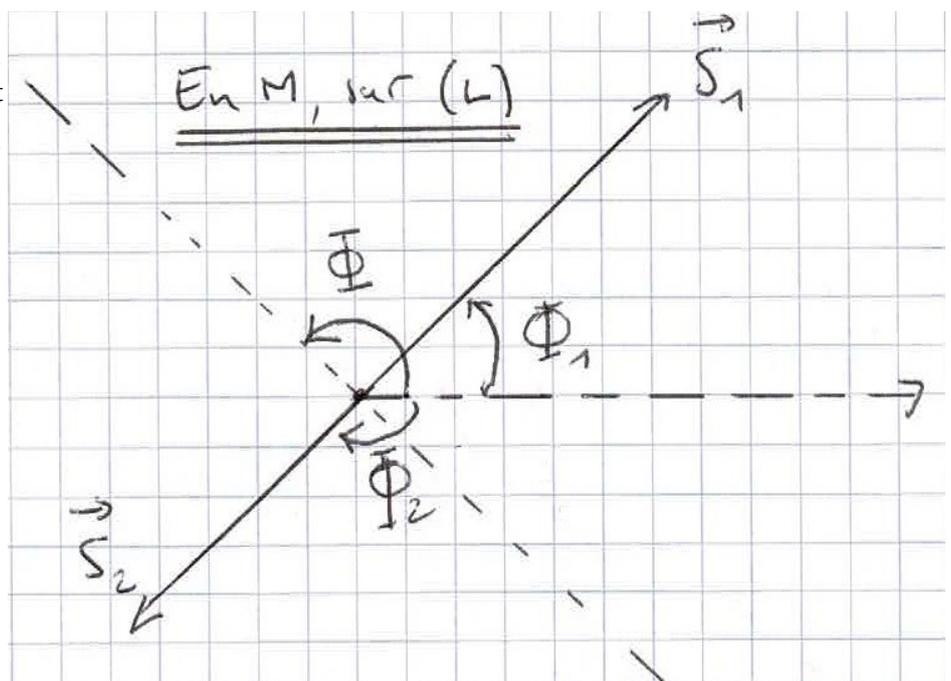
$\Phi_2 = \Phi_1 \pm \pi \Leftrightarrow \Phi_2 \equiv \Phi_1 + \pi [2\pi]$, donc

$\Phi_1 + \Phi_2 \equiv 2\Phi_1 + \pi [2\pi]$ et finalement

$\Phi \equiv \Phi_1 + \frac{\pi}{2} [\pi]$. On représente donc

l'angle $\Phi = \Phi_1 + \frac{\pi}{2}$, mais on aurait

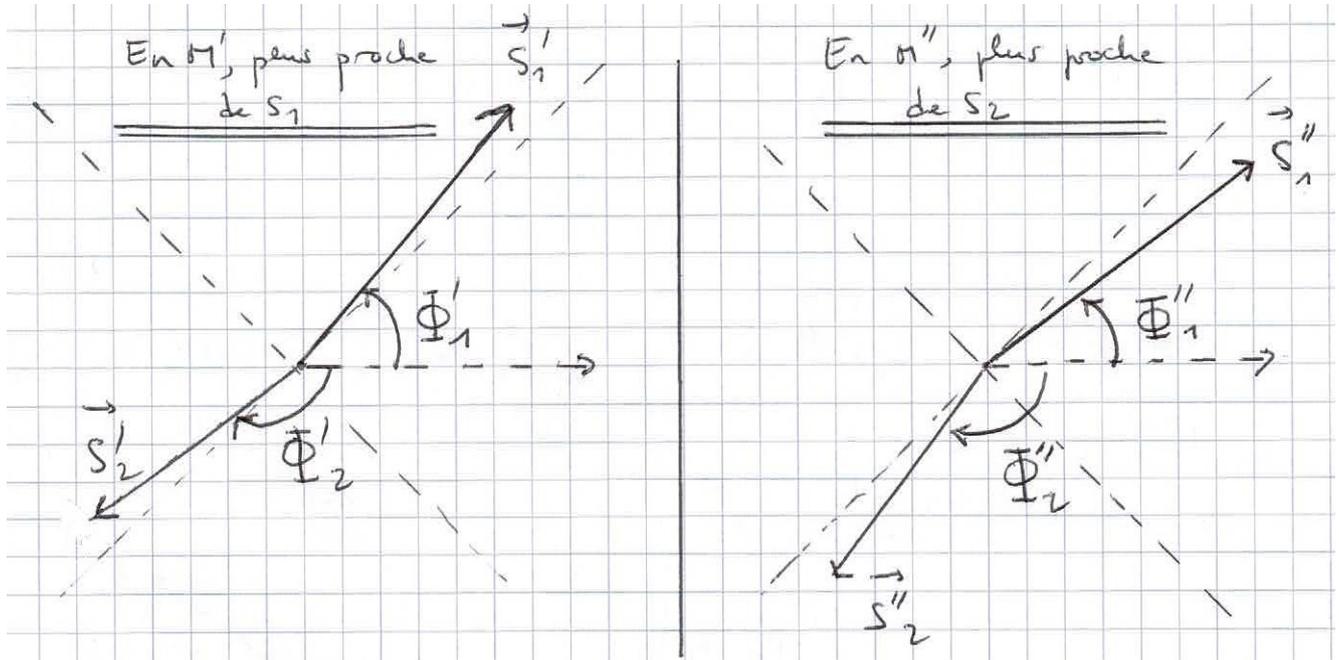
pu choisir $\Phi = \Phi_1 - \frac{\pi}{2}$.



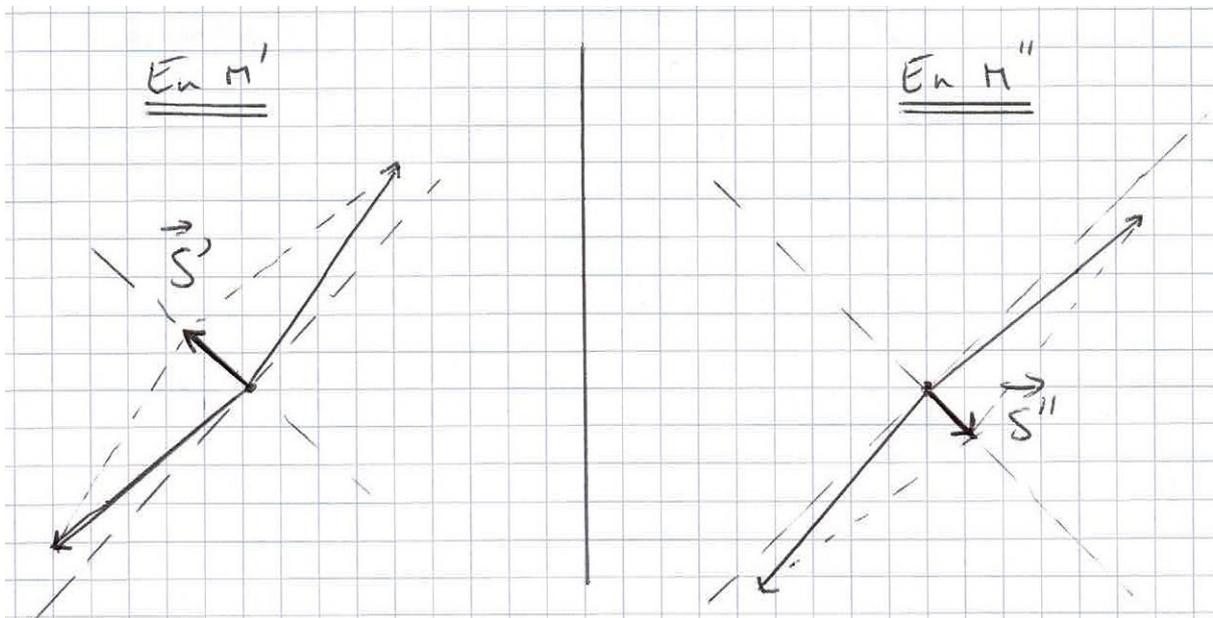
4.c. M' est alors légèrement plus proche de S_1 que M : d_1 a donc diminué, et d'après l'expression de la phase $\Phi_i = \omega t - kd_i$, on trouve que $\Phi'_1 > \Phi_1$.

Avec le même raisonnement, $\Phi'_2 < \Phi_2$, mais attention, c'est algébrique et Φ_2 est négatif sur la figure.

C'est le contraire pour M'' : $\Phi''_1 < \Phi_1$ et $\Phi''_2 > \Phi_2$, d'où les schémas de Fresnel :



4.d. L'addition vectorielle (diagonale du losange) donne qu'au point M' la phase de l'onde est exactement Φ , si les amplitudes sont identiques.



En M'' , le vecteur somme est de sens opposé : sa phase est $\Phi \pm \pi$.

On a donc bien expliqué l'opposition de phase observée lors de la traversée de la ligne de vibration minimale.

On retrouve exactement le même phénomène dans l'onde stationnaire lors de la traversée d'un nœud.

On constate de plus que ce n'est pas exact si les amplitudes des deux ondes sont assez différentes, donc loin de l'axe (Oy) et près des sources, ce qu'on voit effectivement en regardant le cliché avec soin.