CENTRALE 2011 – RICOCHETS (MÉCANIQUE DU POINT)

II.A.1) La longueur immergée est telle que $\frac{|z|}{l_{\text{im}}}=\sin\theta$, donc $\boxed{S_{\text{im}}=l_{\text{im}}a=-\frac{a\,z}{\sin\theta}}$

II.A.2) On a $\vec{t}\cdot\hat{x}=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, donc $\vec{t}$ étant globalement vers l'arrière de $\hat{z}$ (méthode rapide = lignes trigo croisées pour que la norme soit bien égale à 1 + sens) : $\vec{t}=-\cos\theta\,\hat{x}-\sin\theta\,\hat{z}$.

Les lignes trigo sont inversées pour $\vec{n}$, et, à l'aide de son sens : $\vec{n}=-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{z}$.

La RFD est $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{P}$, donc :

$$\boxed{\begin{cases} m\dot{v}_x=m\ddot{x}=\frac{1}{2}\rho v^2 S_{\text{im}}(-C_n\sin\theta-C_t\cos\theta) \\ m\dot{v}_z=m\ddot{z}=\frac{1}{2}\rho v^2 S_{\text{im}}(C_n\cos\theta-C_t\sin\theta)-m\,g \end{cases}}$$

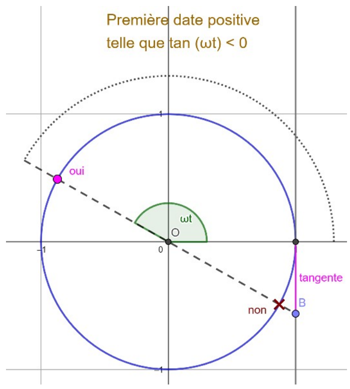
(laborieux, mais aucun problème...)

II.A.3.a) La seconde équation est $\ddot{z}=\frac{1}{2m}\rho C v^2 S_{\text{im}}-g$: $\ddot{z}+\frac{\rho C a v^2}{2m\sin\theta}z=-g$, harmonique avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{\rho C a v^2}{2m\sin\theta}}}$.

II.A.3.b) SP : $-\frac{g}{\omega_0^2}$, qu'on ne remplace pas (c'est un tas de #@x! + cf question suivante).

Donc $z(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)-\frac{g}{\omega_0^2}$, et $\dot{z}(t)=-A\,\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\,\omega_0\cos(\omega_0 t)$.

L'injection des 2 CI donne $\boxed{z(t)=\frac{g}{\omega_0^2}(\cos(\omega_0 t)-1)+\frac{v_{z0}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$ et $\boxed{v_z(t)=\dot{z}(t)=-\frac{g}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)+v_{z0}\cos(\omega_0 t)}$



II.A.3.c) La profondeur maximale est atteinte quand la vitesse verticale s'annule, donc à la <u>première</u> date telle que $\tan(\omega_0 t)=\frac{\omega_0 v_{z0}}{g}<0$: on aura judicieusement remarqué que l'énoncé insiste lourdement sur les signes de z et de v_{z0} ...

On voit (!wtf) grâce au cercle trigo que cette solution vérifie $\sin(\omega_0 t)>0$ et $\cos(\omega_0 t)<0$ →

On ne pourra pas répondre à la question suivante avec des écritures du type $\sin(\ldots\text{Arctan}(\ldots))$: il faut impérativement simplifier pour déterminer les lignes de $\omega_0 t$ en fonction de $\tan(\omega_0 t)$, qu'on note τ pour alléger l'écriture.

$\tau^2=\frac{\sin^2(\omega_0 t)}{1-\sin^2(\omega_0 t)}$ donc $\sin^2(\omega_0 t)=\frac{\tau^2}{1+\tau^2}$, puis $\cos^2(\omega_0 t)=1-\sin^2(\omega_0 t)=\frac{1}{1+\tau^2}$.

Avec tous les signes déterminés, on trouve $\sin(\omega_0 t)=-\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}>0$ et $\cos(\omega_0 t)=-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}<0$.

On peut écrire $z(t)=\frac{g}{\omega_0^2}\left[(\cos(\omega_0 t)-1)+\frac{\omega_0 v_{zo}}{g}\sin(\omega_0 t)\right]=\frac{g}{\omega_0^2}(\cos(\omega_0 t)-1+\tau\sin(\omega_0 t))$, donc

$p_{\max}=|z_{\min}|=-z_{\min}=\frac{g}{\omega_0^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}-\tau\frac{(-\tau)}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)=\frac{g}{\omega_0^2}\left(1+\sqrt{1+\tau^2}\right)$: $\boxed{p_{\max}=\frac{g}{\omega_0^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_{zo}^2}{g^2}}\right)}$.

II.A.3.d)

Il va falloir remplacer ω_0 dans l'expression précédente… on n'est pas rendus à Loches !

On a bien sûr, d'après le schéma : $v_{zo}=-v\sin\alpha=-v_0\sin\alpha$, et il faut résoudre, pour que le galet ne coule pas $p_{\max}<\frac{a}{\sin\theta}$: $\frac{2mg}{\rho C a v^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\rho C a v^2}{2mg^2\sin\theta}v^2\sin^2\alpha}\right)<a$, soit (aucun moyen de vérifier l'homogénéité en cours de calcul…) : $\sqrt{1+\frac{\rho C a v^4\sin^2\alpha}{2mg^2\sin\theta}}<\frac{\rho C a^2 v^2}{2mg}-1$.

On élève au carré et les « 1 » s'en vont(!) : $\frac{\rho C a v^4\sin^2\alpha}{2mg^2\sin\theta}<\frac{\rho^2 C^2 a^4 v^4}{(2mg)^2}-2\frac{\rho C a^2 v^2}{2mg}$, qu'on simplifie au maximum avant toute chose (élimination de $\frac{\rho C a v^2}{2mg}$) : $\frac{v^2\sin^2\alpha}{g\sin\theta}<\frac{\rho C a^3 v^2}{2mg}-2a$.

On relit l'expression demandée pour s'en approcher : $\underline{\frac{\rho C a^3 v^2}{2m}-\frac{v^2\sin^2\alpha}{\sin\theta}>2ag}$.

Une dernière factorisation, très simple (!!), donne le résultat demandé.

AN : $m=0{,}02\,\text{kg}$, $a=0{,}07\,\text{m}$, calculatrice en mode DEG pour les angles :
$C=\cos(5{,}0°)-\sin(5{,}0°)=0{,}909$ et $\underline{v_0>0{,}42\,\text{m/s}}$

II.A.4) On résout donc $z(t)=\frac{g}{\omega_0^2}(\cos(\omega_0 t)-1)+\frac{v_{zo}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)=0$, mais on remarque que la vitesse initiale est vraiment très supérieure à sa valeur limite : le terme en sinus domine donc largement et son premier zéro (différent de 0) est bien tel que $\omega_0 t=\pi$.

On a alors, à partir de $v_z(t)=-\frac{g}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)+v_{zo}\cos(\omega_0 t)$, et lors de la sortie de l'eau :

$v_z=-\frac{g}{\omega_0}\sin(\pi)+v_{zo}\cos(\pi)$ soit $v_z=-v_{zo}=v\sin\alpha$.

II.A.5.a) On reprend l'équation selon x : $m\dot{v}_x=-\frac{1}{2}\rho C' v^2 S_{\text{im}}$, donc $\dot{v}_x=\frac{\rho C' a v^2}{2m\sin\theta} z$, qu'on doit intégrer pour obtenir Δv_x , entre les dates 0 et $\tau=\frac{\pi}{\omega}$: $v_x(\tau)-v_{xo}=\Delta v_x=\frac{\rho C' a v^2}{2m\sin\theta}\int_0^{\pi/\omega_o} z(t)dt$.

On remplace : $\Delta v_x=\frac{\rho C' a v^2}{2m\sin\theta}\frac{g}{\omega_o^2}\int_0^{\pi/\omega_o} dt\left[\cos(\omega_o t)-1+\frac{\omega_o v_{zo}}{g}\sin(\omega_o t)\right]$, ce qui donne $\Delta v_x=\frac{\rho C' a v^2}{2m\sin\theta}\frac{g}{\omega_o^2}\left[\frac{1}{\omega_o}\sin(\omega_o t)-t-\frac{v_{zo}}{g}\cos(\omega_o t)\right]_0^{\pi/\omega_o}=\frac{\rho C' a v^2}{2m\sin\theta}\frac{g}{\omega_o^2}\left[0-\frac{\pi}{\omega_o}+2\frac{v_{zo}}{g}\right]$ avec l'approximation du II.A.4) sur la date finale.

De $\omega_o=\sqrt{\frac{\rho C a v^2}{2m\sin\theta}}$, on tire $\Delta v_x=\frac{C'}{C}g\left[2\frac{v_{zo}}{g}-\frac{\pi}{\omega_o}\right]=\frac{C'}{C}\left[2v_{zo}-\frac{g\pi}{\omega_o}\right]$.

D'après la figure 5, on a $\tan\alpha=\frac{|v_{zo}|}{v_{xo}}=-\frac{v_{zo}}{v_{xo}}$, et $\cos\alpha=\frac{v_{xo}}{v}$.

On en déduit que $\Delta v_x=\frac{C'}{C}\left[-2v_{xo}\tan\alpha-\frac{g\pi}{\omega_o}\right]$, soit $\frac{\Delta v_x}{v_{xo}}=\frac{C'}{C}\left[-2\tan\alpha-\frac{g\pi}{\omega_o v_{xo}}\right]$, et effectivement $\boxed{\frac{\Delta v_x}{v_{xo}}=\frac{C'}{C}\left[-2\tan\alpha-\frac{g\pi}{\omega_o v\cos\alpha}\right]}$, qui est bien le résultat demandé, puisque tout est négatif à droite de l'équation.

AN : $C'=\sin(5{,}0°)+\cos(5{,}0°)=1{,}08$, puis $\boxed{\left|\frac{\Delta v_x}{v_{xo}}\right|=0{,}083=8{,}3\,\%}$

II.A.5.b) La variation relative de la vitesse horizontale n'est pas tout-à-fait négligeable avec ces données, mais elle sera d'autant plus faible que :

- α est petit (angle d'attaque) ;
- v est élevée, et (dans ω_o qui doit être élevé), θ est petit (inclinaison du palet).

On s'en doutait un peu…

II.B.1.a) On a $\Delta E_c=\Sigma W(\vec{F}_k)=\int_0^{\tau}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt+W(\vec{P})$

Comme on part et on revient à $z=0$, le travail du poids est nul, puisqu'il s'agit d'une force conservative.

Il reste $\Delta E_c=\int_0^{\tau}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\int_0^{\tau}(F_x v_x+F_z v_z)dt$, avec $F_z v_z=\frac{\rho C a v^2}{2\sin\theta} z v_z$ d'après la QII.A.2.

On a $\int_0^{\tau}\frac{\rho C a v^2}{2\sin\theta}z(t)v_z(t)dt=\frac{\rho C a v^2}{2\sin\theta}\left[\frac{1}{2}z^2(t)\right]_0^{\tau}=0$, car, encore, $z(\tau)=0$.

Il ne reste que la contribution de F_x dans le travail.

II.B.1.b) On a $F_z=\frac{\rho C a v^2}{2\sin\theta}z$ et $F_x=-\frac{\rho C' a v^2}{2\sin\theta}z$, donc $F_x=-\frac{C'}{C}F_z$, donc c'est correct avec $\mu=\frac{C'}{C}$.

II.B.1.c) D'après le résultat indiqué, on voit que la durée $\frac{\pi}{\omega_0}$ est sortie de l'intégrale, et que le poids $P=mg$ apparaît…

On peut le justifier en intégrant la RFD selon z : $m\int_0^\tau \dot{v}_z dt=\int_0^\tau F_z dt+\int_0^\tau P_z dt$, ce qui donne $m(v_z(\tau)-v_z(0))=\int_0^\tau F_z dt-mg\frac{\pi}{\omega_0}$.

On obtient le résultat demandé en négligeant la variation de la vitesse verticale devant la variation de la vitesse horizontale, ce qui est légitime puisque la vitesse horizontale est très élevée.

On obtient alors $\Delta E_c=-\frac{C'}{C}mgv_o\cos\alpha\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\rho C a v_0^2}{2m\sin\theta}}}$, où v_0 n'apparaît plus :

$$\Delta E_c=--\frac{C'}{C}\sqrt{\frac{2\pi^2 m^3 g^2\cos^2\alpha\sin\theta}{\rho C a}}$$

II.B.2) On a déjà constaté que la vitesse initiale $v_0=50\,\mathrm{m/s}$ était très supérieure à la vitesse minimale pour que le palet reste en surface : on peut considérer qu'il coule avec une énergie cinétique négligeable.

On peut donc considérer que le nombre N de ricochets vérifie l'équation : $E_{c0}-0=N|\Delta E_c|$.

On a donc $N=\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{C'}{C}\sqrt{\frac{2\pi^2 m^3 g^2\cos^2\alpha\sin\theta}{\rho C a}}}$ soit $N=\sqrt{\frac{\rho C^3 a v_0^4}{8\pi^2 m g^2 C'^2\cos^2\alpha\sin\theta}}=14000$, modèle qui est donc très optimiste.