

## TD 28 – ONDES, QUANTIQUE

### 1. Ondes progressives ou non ?

a) Oui avec  $c = \frac{1}{8} = 0,125$  m/s vers les  $x < 0$ .

b) Oui avec  $c = 2$  m/s vers les  $x > 0$ .

c) Non : on ne peut pas exprimer  $s$  comme une fonction d'une seule variable  $u = x \pm ct$ .

### 2. Détection du monoxyde de carbone dans l'atmosphère

```

from math
import pi
σ = 2170 #cm-1
# donc
λ = 1/σ # cm
λm = λ/100 #m
k = 2*pi/λm
c = 3e8 # m/s
T = λm/c
f = 1/T
ω = 2*pi*f
    
```

```

>>> λm
4.608294930875576e-06
>>> k
1363451.2116579702
>>> T
1.5360983102918587e-14
>>> f
65100000000000.0
>>> ω
409035363497391.06
    
```

### 3. Phase à l'origine des dates

	50 D		
	1500 c		
	100 f		
	0,033333333 τ		
	-6,66666667 $\varphi_M/\pi$		On utilise $\varphi = \omega(-\tau)$
	-0,66666667 $\varphi_M/\pi$		Modulo 2
	-120 $\Phi_M$ (°)		

#### 4. Loi de la réfraction de Snell-Descartes

$A_1 I = \lambda_1$   
 $J A_2 = \lambda_2$

$$\begin{cases} IJ \sin i_1 = \lambda_1 = v_1 \cdot T = \frac{cT}{n_1} \\ IJ \sin i_2 = \lambda_2 = v_2 \cdot T = \frac{cT}{n_2} \end{cases}$$

Maths : angles retrouvés par le théorème des couples de demi-droites perpendiculaires

$$\frac{\sin i_1}{\lambda_1} = \frac{\sin i_2}{\lambda_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{cT} (n_1 \sin i_1) = \frac{1}{cT} (n_2 \sin i_2)$$

#### 5. Ondes dans un plasma

a) C'est positif à gauche, et  $k$  doit pouvoir être calculé : il faut donc que  $\omega^2 - \omega_p^2 > 0$  (pas nul sinon,  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  serait infinie), donc que  $\omega > \omega_p$

b)  $c = \frac{\omega}{k}$ , relation de dispersion, équivalente à la relation fondamentale des OPH  $\lambda = cT$ ,

donc, en divisant la relation par  $k$  :  $c_0^2 = c^2 - \frac{\omega_p^2}{k^2}$ , où l'on doit remplacer  $1/k^2$ , donc

$$c_0^2 = c^2 - \omega_p^2 \frac{c_0^2}{\omega^2 - \omega_p^2} : c^2 = c_0^2 + \omega_p^2 \frac{c_0^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \text{ soit } c = c_0 \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}, \text{ fonction qui tend vers } +\infty$$

quand  $\omega \rightarrow \omega_{p,+}$  (toujours déterminer le domaine de définition avant de chercher les

limites), et puisque  $c = c_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$  (on lève l'indétermination), qui tend vers  $c_{0,+}$  quand

$\omega \rightarrow +\infty$ .

C'est une composée de fonctions décroissantes ( $1/x^2$ ), décroissante (-), croissante (racine), décroissante ( $1/x$ ) : inutile de dériver, elle est donc strictement décroissante.

Cela semble en contradiction avec les théories d'un obscur physicien d'origine allemande concernant la célérité de la lumière comme maximum possible pour les diverses

vitesses...

- c)  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c_0^2$ , donc  $\frac{d\omega^2}{dk} = 2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2k c_0^2$  :  $v = \frac{k c_0^2}{\omega} = \frac{c_0^2}{\omega} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} = c_0 \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$ , toujours strictement inférieure à  $c_0$  (courbe inverse de la précédente, au facteur  $c_0$  près).

## 6. Indice d'un verre

- a) On a la relation fondamentale des ondes  $\lambda = cT$ , dans un milieu quelconque. Dans le vide  $\lambda_0 = c_0 T$ .

En faisant le rapport des 2 expressions  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{c}{c_0}$  donc  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ , par définition de l'indice.

- b) On obtient  $\frac{c_0}{v} = A + B \frac{f^2}{c_0^2}$ , puisque  $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$  :  $v = \frac{c_0}{A + B \frac{f^2}{c_0^2}}$

Attention !  $\lambda_0$  dépend bien de  $f$ , il faut la remplacer.

- c) On a  $\omega = kv$  donc  $\omega = k \frac{c_0}{A + B \frac{\omega^2}{(2\pi c_0)^2}}$  :  $k c_0 = \omega \left( A + B \frac{\omega^2}{(2\pi c_0)^2} \right)$

## 7. Écoute musicale partagée

### Écoute musicale partagée

Chloé écoute à plein volume de la musique dans sa chambre. Son frère Hugo est dans la sienne, à côté de celle de Chloé, et la porte de séparation de largeur  $L = 80 \text{ cm}$  est grande ouverte.

La célérité du son dans l'air est  $c = 340 \text{ m/s}$ .

- a) Justifier que quelle que soit la position de Hugo dans sa chambre, il entend parfaitement les basses.

Dans quel domaine spectral (fréquentiel) exactement?

- b) Hugo se trouve dans sa chambre au point de coordonnées  $(x = D; y = D)$  avec  $D = 3 \text{ m}$ , où l'axe  $x$  fait face à la porte, l'axe  $y$  est parallèle à la cloison et l'origine est au centre de la porte.

Quelle est la fréquence que Hugo n'entend pas du tout? quel domaine spectral entend-il très mal?

$$\tan \theta = \frac{D - \frac{L}{2}}{D} = 1 - \frac{L}{2D}$$

$$f = \frac{c}{L \sin \left[ \arctan \left( 1 - \frac{L}{2D} \right) \right]}$$

"pas du tout":  
Hugo est sur  
la ligne " $\theta$ "  
exactement.

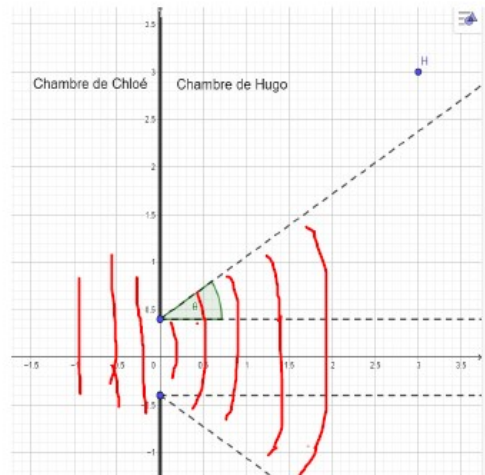
```
>>> a=atan(1-.8/6)
```

```
>>> 425/sin(a)
648.9237790418202
```

"très mal":  
H au-dessus de  
la ligne " $\theta$ " :  $f > 649 \text{ Hz}$   
(aigus)

$$\sin \theta = K \frac{\lambda}{a} : \sin \theta = \frac{c}{L f} \quad (K=1, \lambda=c/f)$$

- a) Onde sphérique : pas de solution  
pour  $\theta : c > L f$   
donc  $f < c/L = 425 \text{ Hz}$



## 8. Interférences

### Par le calcul

Comme on cherche aussi la phase de la somme, la formule d'addition ne suffit pas.

En remplaçant  $S, S_1$  et  $S_2$  par  $S$  dans le système du cours, on obtient 
$$\begin{cases} S \sin \varphi = S \sin \psi \\ S + S \cos \varphi = S \cos \psi \end{cases}$$

donc 
$$\begin{cases} \sin \psi = \sin \varphi \\ \cos \psi = 1 + \cos \varphi \end{cases}$$
 ce qui donne

- d'abord, par la même méthode que pour l'obtention de l'amplitude :

$$\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi)^2 = 1 : \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \text{ soit } \varphi = \pm 120^\circ \text{ dans le domaine principal.}$$

- ensuite, le système devient 
$$\begin{cases} \sin \psi = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \end{cases}$$
, qui conduit à  $\psi = \pm 60^\circ$ .

### Par construction graphique

On trace  $\vec{S}_1$  arbitrairement, puis un cercle de rayon  $S_1$  centré sur la flèche de  $\vec{S}_1$  :  $\vec{S}_2$  sera sur un rayon de cercle.

On trace autre cercle de même rayon de centre le talon de  $\vec{S}_1$  : le vecteur somme  $\vec{S}$  sera sur un rayon.

Avec les deux intersections, on retrouve  $\varphi$  et  $\psi$ .

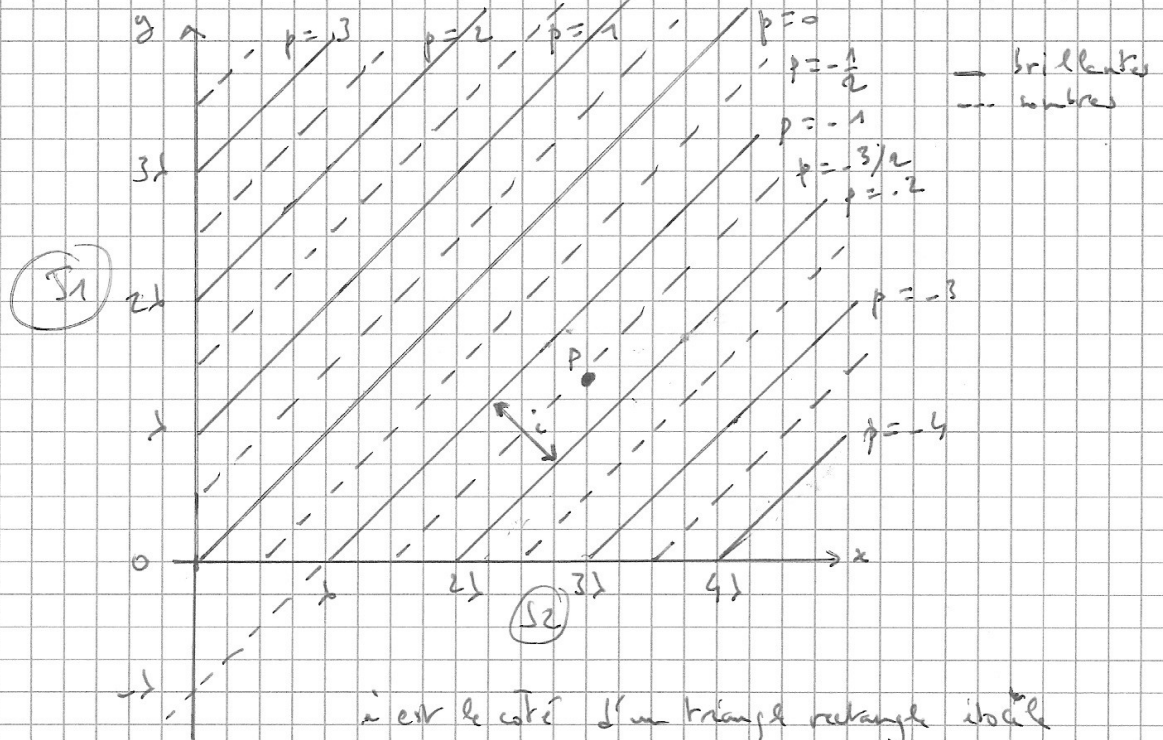
# 9. Hauts-parleurs linéaires

a)  $\lambda = cT = \frac{c}{f} = 1,70 \text{ cm}$

b) 1<sup>re</sup> bissectrice :  $y = x$  ; on a donc  $p = p_1 + p_2 = 6 \text{ Pa}$ , car interférences constructives (sources en phase + même valeur).

c)  $S_2M - S_1M = p\lambda \Leftrightarrow y - x = p\lambda$  ;  $y = x + p\lambda$ ,  $p \in \mathbb{Z}$

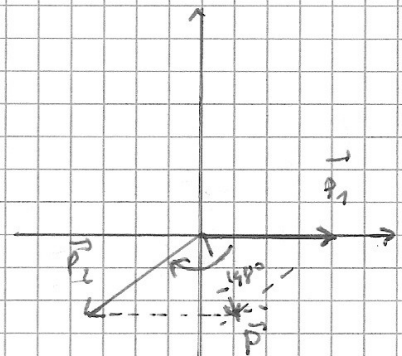
Donc droite // à la 1<sup>re</sup> bissectrice, d'ordonnée à l'origine  $p\lambda$ .



$i$  est le côté d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse  $\lambda$ , donc  $i = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 1,20 \text{ cm}$

d) on a  $x_p = 3\lambda$  et  $y_p = 1,41\lambda \equiv 0,41\lambda [\lambda]$

La phase est donc la même que celle du HP sur (0,y) :  $S_1$   
 Le retard de phase est donc, sur le HP en (0,4) :  $S_2$  de  $0,41 \times 360^\circ = 148^\circ$



On voit que  $\varphi_p = -\frac{148^\circ}{2} = -74^\circ$   
 et que  $\frac{p}{2} = p_1 \cos \varphi_p$  ;  $p = 2 \cdot 2 \text{ Pa} \cdot \cos 74^\circ = 1,09 \text{ Pa}$   
 ( $p_1 = p_2$  donc losange donc diagonales perpendiculaires.)

## 10. Tension d'une corde

### 11. Corde de piano

a)  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

b) Relation de dispersion  $\omega = kc_0$   
 mais  $\mu \omega^2 = Fk^2$   
 Le 1<sup>ère</sup> au carré, puis division :  $\frac{1}{\mu} = \frac{c_0^2}{F}$  #  
 $c_0$  est une constante : milieu non dispersif.

c) Cours : mode  $p$  entier =  $p$  nœuds  
 donc  $L = p \frac{\lambda}{2} = p \frac{c}{2f}$  :  $f = p \cdot \frac{c}{2L}$ , notée  $f_p$

d) Somme des modes  $\rightarrow$  toutes les  $f_p$  produites.  
 Elles sont multiples entre elles : Fourier  $\rightarrow$  son périodique non linéaire.

e)  $c = \frac{\omega}{k}$ . Dans la relation de dispersion, on a

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{F}{\mu} + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^2$$

$$\text{soit } c^2 = c_0^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^2 : c = \sqrt{c_0^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^2}$$

f) C'est  $k$  qui dépend de  $p$  au travers de  $\lambda$  :  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  avec  $L = p \frac{\lambda}{2}$

$$\text{donc } k = 2\pi \cdot \frac{p}{2L} = p \frac{\pi}{L}$$

$$c = \sqrt{c_0^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} \frac{\pi^2}{L^2} p^2}$$

g) On a encore  $f = p \frac{c}{2L}$  : on sort  $c_0^2$  de la  $\sqrt{\quad}$  (factorisation)  
 $f_p = p \frac{c_0}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4\mu L^2 c_0^2} p^2}$  :  $B = E \frac{\pi r^4}{4\mu L^2 c_0^2} = E \frac{\pi r^4}{4FL^2}$

Clairément pas régulièrement réparties  $\rightarrow$  son non périodique, un peu faux.

Bonne corde de piano :  $B$  petit  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ petit (rayon)} \\ F \text{ grande (tension)} \\ L \text{ grande (longueur)} \end{array} \right.$

## 12. Autre calcul de l'onde stationnaire (point de vue de spé)

a)  $s(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$

b)  $s(0,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi$ , qui doit être nul  
donc  $A \cos \psi = 0$ ,  $A > 0$  non nul.

$$\cos \psi = 0 : \psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \left( \frac{\pi}{2} [\pi] \right)$$

On ne trouve rien concernant  $\varphi$ .

c)  $s(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(kx \pm \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \pm A \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$$

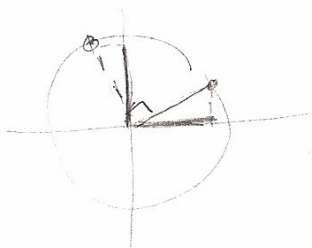
d) on peut transformer  $-\cos$  :  $s(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi \pm \pi) \sin kx$

et on pose  $\varphi' = \varphi \pm \pi$  :  $s(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi') \sin kx$

e) on pose  $A = 2A'$  et il faut transformer le cos temporel

en sinus :  $\cos(\omega t + \varphi') = \sin\left(\omega t + \varphi' + \frac{\pi}{2}\right)$

on remplace par  $\varphi'' = \varphi' + \frac{\pi}{2}$



### 13. Instrument à vent

$$m \ll M$$



Courbe de  $p(x)$  à une date donnée

$$\frac{1}{2} \text{ fuseau} : L = \frac{\lambda}{4}$$

b)  $L = \frac{c}{4f_1} = 4,13 \text{ m}$  : grand mais cohérent.



1 fuseau de plus...

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}, \text{ qu'on généralise}$$

$$\text{par } L = \frac{\lambda}{4} + p \frac{\lambda}{2}, p \in \mathbb{N}^*$$

( $L > 0$ , ainsi que  $\lambda$ )

Mais ici, on doit avoir  $\frac{\lambda}{4}$  pour  $n=1$ , alors qu'on l'obtient pour  $p=0 : n=p+1$

$$L = \frac{\lambda}{4} + (n-1) \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} [1 + 2(n-1)]$$

$$= \frac{\lambda}{4} (2n-1)$$

d)e)  $\lambda = cT = \frac{c}{f} : f = \frac{c}{\lambda}$  donc  $f_n = \frac{c}{4L} (2n-1)$ , multiple impair de  $\frac{c}{4L}$ .



# 14. Trous d'Young

1. Diffraction de l'onde par chacune des fentes.  $\odot$
2. On pourra faire l'approximation des petits angles.
3. Par symétrie, les ondes ont les mêmes en  $o'$  : addition constructive donc frange brillante.

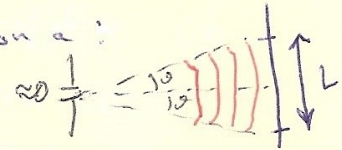
$\odot$  On a  $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$  :  $\theta = \frac{\lambda}{d}$

$\swarrow$  du premier minimum       $\rightarrow$  largeur fente  
 $\searrow$  1 période fente

Par ailleurs, on dit la largeur du champ visible d'interférences  $L \approx 2,0$  cm (entre 1,6 cm et 3,6 cm, abscons des zéros (pas de lumière)).

En supposant a petit devant  $d$ , on a :

$$\theta = \frac{L/2}{D} \text{ demi largeur}$$



donc  $\frac{2D}{L} = \frac{d}{\lambda}$  :  $d = \frac{2D\lambda}{L} = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 75 \mu\text{m}$ . (c'est approché...)

4. a.  $S = S_2M - S_1M$

avec  $S_2M = \sqrt{|S_2M|^2}$  et  $\vec{S}_2M = \vec{S}_2O + \vec{O'O} + \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_M + a \\ D \end{pmatrix}$

donc  $S = \sqrt{(x_M + a)^2 + D^2} - \sqrt{(x_M - a)^2 + D^2}$

b.  $S_2M = D \sqrt{1 + \left(\frac{x_M + a}{D}\right)^2} \approx D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_M + a}{D}\right)^2 \right]$  car  $a, x_M \ll D$

$- S_1M \approx D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_M - a}{D}\right)^2 \right]$

$S = \frac{D}{2D^2} \cdot \left[ \underbrace{(x_M + a)^2}_{4a x_M} - (x_M - a)^2 \right]$  :  $S = \frac{2a}{D} x_M$

c.  $\varphi_2 = \varphi_{20} - k S_2M$  :  $\varphi_{21} = -k S = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2a}{D} x_M$

$\varphi_1 = \varphi_{10} - k S_1M$

$\uparrow$   
à la source = avec fentes

$= -\frac{4\pi a}{\lambda D} x_M$

Max: frange brillante :  $\varphi_{2/1} \equiv 0 [2\pi]$

donc  $\frac{4\pi a x_M}{\lambda D} = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$

$x_M = p \cdot \left( \frac{\lambda D}{2a} \right)$ , régulièrement espacés  
(multiples de  $\frac{\lambda D}{2a}$ ).

interfrange

$\Delta x_{pe} = i = \frac{\lambda D}{d}$

distance entre fentes

Min: frange sombre :  $\varphi_{2/1} \equiv \pi [2\pi]$

donc entre les deux :  $x_M = \left( p + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda D}{2a}$  même i

4. Il y a 4 interfranges entre les fentes

sombres situées à 2,2cm et 3,2cm :  $i = 0,25\text{cm}$

$2a = \frac{\lambda D}{i} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 300 \mu\text{m}$

## 15. Photons radio

On a  $E_{\text{phot}} = hf = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \times 105,5 \text{ MHz} = 6,984 \cdot 10^{-26} \text{ J}$  .

La puissance de l'émetteur est  $P = 100 \text{ kW} = 1,00 \cdot 10^5 \text{ J/s}$  .

On trouve donc un nombre de photons par seconde  $N = \frac{P}{E_{\text{phot}}} = 1,43 \cdot 10^{30} \text{ s}^{-1}$

## 16. Raie d'émission

On a donc  $E = 2,28 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,65 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  qu'on égalise avec  $E_{\text{phot}} = hf = h \frac{c}{\lambda}$  , donc  $\lambda = 5,44 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 544 \text{ nm}$  , vert jaune.

## 17. Calcul de la longueur d'onde de matière

a)  $p = \frac{h}{\lambda}$  puis

Hypothèse: calcul classique correct:  $p = mv$  donc  $v = \frac{h}{\lambda m} = 7,27 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  qui est bien inférieure à  $c/10$ , donc  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 2,41 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 150 \text{ eV}$  .

b)

Electron:

$E_c$  est proportionnelle à  $v^2$  donc à  $p^2$  donc à  $\frac{1}{\lambda^2}$  |:  $E_c \lambda^2$  est une constante. Pour un électron:  $150 \text{ eV} \times (0,1 \text{ nm})^2 = 100 \text{ eV} \times \lambda_{\Delta B}^2$  |:  $\lambda_{\Delta B} = 0,122 \text{ nm}$

Proton:

Pour  $E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$  fixée, on a  $m\lambda^2$  constante. On trouve

$$\lambda_{\Delta B} = 0,122 \text{ nm} \times \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = 2,86 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,86 \text{ pm}$$

## 18. Nombre de

### 4. Photons en astronomie.

a) On reçoit donc sur  $S = 1 \text{ m}^2$ , pendant  $\Delta t = 1 \text{ s}$ ,

$$\text{l'énergie } E = \Phi_S \cdot S \cdot \Delta t = 1000 \text{ J}$$

$$\text{Chaque photon a l'énergie } e_{\text{ph}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3,98 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Donc, puisque } E = N e_{\text{ph}}, N = 2,51 \cdot 10^{21} \text{ (m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

b) Soleil:  $m_S = m_0 - 2,5 \log \frac{\Phi_S}{\Phi_0}$

Étoile:  $m_* = m_0 - 2,5 \log \frac{\Phi_*}{\Phi_0}$

$$\text{On soustrait } m_S - m_* = -2,5 \log \frac{\Phi_S}{\Phi_*}$$

$$= 2,5 \log \frac{\Phi_*}{\Phi_S}$$

$$\text{donc } \log \frac{\Phi_*}{\Phi_S} = \frac{m_S - m_*}{2,5}$$

$$\Phi_* = \Phi_S \cdot 10^{\frac{m_S - m_*}{2,5}}$$

Proportionalité avec le nombre de photons:

$$N_* = N_S \cdot 10^{-13,32} = 1,20 \cdot 10^8 \text{ par m}^2 \text{ et par s.}$$

La pupille a une surface

$$\Delta = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ : elle reçoit donc } 4780 \text{ photons par seconde.}$$

L'œil est très sensible.

19.

### Modèle de Slater du lithium

- a) Dans  ${}^7_3\text{Li}$ , les deux premiers électrons, de cœur, complètent la sous-couche 1s. L'électron externe, de valence, se trouve donc sur la sous-couche 2s.
- b) Il est tout seul dans sa sous-couche, et est donc écrané par les deux électrons de cœur. On lit  $\sigma_{1s \rightarrow 2s} = 0,85$ , donc  $Z_{\text{eff}} = 3 - 2 \times 0,85 = 1,3$ .
- c) Le calcul reste le même, sauf que le produit des charges est  $-Z_{\text{eff}}e^2$  et non  $-e^2$ .
- d) L'énergie de l'électron externe au niveau fondamental est alors, en notant  $E_{H1} = 13,6 \text{ eV}$ , valeur absolue de l'énergie du fondamental pour l'atome d'hydrogène :

$$E_f = -\frac{Z_{\text{eff}}^2}{4} E_{H1} = -5,75 \text{ eV} \quad \text{car } n=2 \text{ pour cet électron, et les niveaux d'énergie sont}$$

proportionnels à  $e^4 = e^2 \times e^2$  dans le cas de l'hydrogène. C'est cohérent, avec un écart non négligeable.

## 20. Fonction d'onde d'une particule dans un puits de potentiel infini

7.  $\psi$  dans puits infini

a) Onde stationnaire avec un nœud en  $L$  :

$$\sin(kL) = 0 \text{ avec } kL > 0 : kL = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{donc } k = \frac{n\pi}{L}$$

b) 1 = 100% de chance de le trouver dans  $[0; L]$ .

$$|\psi^2(x, t)| = A^2 \sin^2(kx) \quad \text{exp complexe : module 1}$$

$$\text{On doit donc avoir } A^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx = 1$$

qu'il faut linéariser pour intégrer :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} : \sin^2 x = -\frac{1}{4} (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x})$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

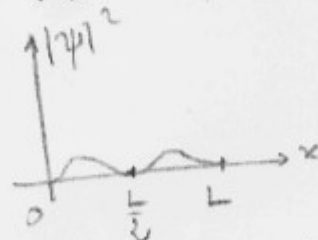
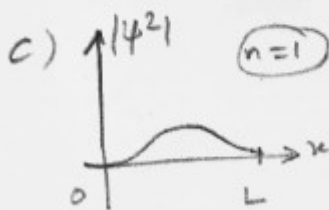
$$\text{Donc } \int_0^L \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} dx - \int_0^L \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) dx$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{2n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) \right]_0^L$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{L}{4n\pi} [\sin(2n\pi) - \sin(0)]$$

$$\text{donc } A^2 \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \rightarrow \text{nuls}$$



Proba supérieure au centre que aux bords  $\rightarrow$

Très différent de l'étude classique

Proba nulle au centre!

## 21.

### Molécules de colorant modélisées par un puits quantique

1. Les électrons  $\pi$  peuvent se déplacer le long de  $2p$  liaisons  $CC$  et de deux liaisons  $CN$  donc :  
 $L = 2(p + 1)a$ .

2. D'après le cours, les niveaux d'énergie possibles pour ces électrons sont :  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8m_e L^2}$ .

3. D'après le principe de Pauli, il y a au plus 2 électrons dans un niveau d'énergie donné. D'après la règle de Hund, la somme des énergies des électrons doit être minimale.

Il y a  $p + 1$  doubles liaisons donc  $2(p + 1)$  électrons  $\pi$ , qui occupent donc les niveaux :  $E_1, E_2, \dots, E_{p+1}$ .

4. La plus grande longueur d'onde absorbée correspond à la plus petite différence d'énergie entre les deux niveaux (puisque  $E = \frac{hc}{\lambda}$ ). Il s'agit du cas où un électron passe du dernier niveau peuplé  $E_{p+1}$  au niveau  $E_{p+2}$  immédiatement au-dessus. L'énergie du photon absorbé est :  $E = E_{p+2} - E_{p+1} = (p + 2)^2 \frac{h^2}{8m_e L^2} - (p + 1)^2 \frac{h^2}{8m_e L^2} = (2p + 3) \frac{h^2}{8m_e L^2} =$

$$\frac{2p + 3}{(2p + 2)^2} \frac{h^2}{8m_e a^2}, \text{ et sa longueur d'onde : } \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(2p + 2)^2}{2p + 3} \frac{8m_e a^2 c}{h}.$$

5. En appliquant la formule théorique on trouve pour  $p = 2, 3, 4,$  et  $5$  respectivement :  $\lambda = 327 \text{ nm}, 452 \text{ nm}, 578 \text{ nm}$  et  $705 \text{ nm}$ . Ces résultats sont assez différents des valeurs expérimentales ce qui n'est pas étonnant étant donnée la grande simplicité du modèle. Cependant on trouve la bonne évolution.

6. La molécule avec  $p = 2$  absorbe dans le violet. Sa couleur est donc la couleur complémentaire : jaune.