5. Lien avec la SII : transformée de Laplace

On obtient dans les deux cas $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\omega_0^2 u_C=\omega_0^2 f(t)$ avec $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et :

- $f(t)=0$ dans le cas du circuit (CL) avec u_C continue donc $u_C(0_+)=U_0$ et $i=i_L$ continue donc $\frac{du_C}{dt}(0_+)=0$.
- $f(t)=E\,u(t)$ où *u* est l'échelon unitaire (fonction de Heavyside), avec les deux conditions initiales nulles, dans le cas du circuit (E,LC).

Circuit CL

On a $L\left[\frac{du_C}{dt}\right](p)=p\,L[u_C](p)-u_C(0_+)=p\,L[u_C](p)-U_0$, puis

$$L\left[\frac{d^2u_C}{dt^2}\right](p)=p\,L\left[\frac{du_C}{dt}\right](p)-\frac{du_C}{dt}(0_+)=p\,L\left[\frac{du_C}{dt}\right](p)$$ donc

$$L\left[\frac{d^2u_C}{dt^2}\right](p)=p^2L[u_C](p)-U_0\,p \quad .$$

On obtient donc $L[u_C](p)=U_0\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$ et donc $u_C(t)=U_0\cos(\omega_0 t)u(t)$

Circuit E,LC

On a $p^2L[u_C](p)+\omega_0^2L[u_C](p)=\omega_0^2\frac{E}{p}$ donc $L[u_C](p)=E\frac{\omega_0^2}{p(p^2+\omega_0^2)}$ qu'on décompose :

$$L[u_C](p)=E\left[\frac{A}{p}+\frac{B\,p+D}{p^2+\omega_0^2}\right] \quad .$$

On cherche les constantes : $\lim_{p\to 0} p\,L[u_C](p)=E=E\,A$, donc $A=1$ puis

$L[u_C](p)=E\left[\frac{p^2+\omega_0^2+B\,p^2+D\,p}{p(p^2+\omega_0^2)}\right]$, avec par identification (pas de terme linéaire en *p* ni de carré au numérateur), $D=0$ et $B=-1$.

Finalement, $L[u_C](p)=E\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right]$, donc $u_C(t)=U_0[1-\cos(\omega_0 t)]u(t)$