Fondement du passage dans les complexes

On a affirmé qu'en régime **sinusoïdal forcé** une relation linéaire entre grandeurs, avec des dérivées temporelles d'ordre quelconque, écrite dans les réels, reste valable dans $\mathbb{C}$.

Par exemple, on a $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$, et on affirme que c'est **équivalent** à $\underline{u_L} = r\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt}$.

Autrement dit, on peut remplacer la fonction « cos » par la fonction « expj ».

<u>Rappels</u> :

- En régime sinusoïdal forcé, toutes les évolutions temporelles sont des sinusoïdes centrées de même pulsation, donc qui s'écrivent nécessairement sous la forme $i = i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$ et $u_L = u_L(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$.
- $(\text{expj} = \cos + j\sin)$.

Ce n'est pas si évident car on ajoute *j* fois les parties imaginaires à chacun des termes de l'équation dans les réels, donc des grandeurs différentes de chaque côté du signe =.

1. Affirmation (temporaire, démontrée au 2)

→ Si l'on remplace les « cos » par des « sin », les équations restent vérifiées.

Plus formellement, dans l'exemple précédent où *i* et u_L vérifient l'équation donnée, on affirme que $\tilde{u}_L = r\tilde{i} + L\frac{d\tilde{i}}{dt}$ où $\tilde{i} = I_m \sin(\omega t + \varphi_I)$ et $\tilde{u}_L = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$.

L'affirmation étant admise, on a alors $\begin{cases} u_L = ri + L\dfrac{di}{dt} & (1) \\ \tilde{u}_L = r\tilde{i} + L\dfrac{d\tilde{i}}{dt} & (2) \end{cases}$. En appliquant sur ce système **linéaire** (hypothèse absolument nécessaire) l'opération $(1) + j(2)$, on retrouve bien l'équation vérifiée par les représentations complexes (car $\underline{i} = i + j\tilde{i}$, etc.), et la généralisation à toute équation linéaire est évidente.

La démonstration du sens indirect de l'équivalence est triviale : on prend la partie réelle de l'équation dans $\mathbb{C}$.

2. Preuve de l'affirmation

C'est plus subtil ici : on a $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$, le sinus est donc un cosinus retardé d'1/4 de période (preuve vue en cours, et cf allure des courbes de cos et sin).

On redonne la preuve : $\tilde{i}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi_I - \omega\frac{T}{4}\right)$, donc $\tilde{i}(t) = i\left(t - \frac{T}{4}\right)$, et de même pour toutes les grandeurs électriques. (<u>Rappel</u> : $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

Or le dispositif (circuit ici, mais on passe aussi dans $\mathbb{C}$ en mécanique ou dans les ondes) étudié est **invariant** : le temps n'apparaît jamais dans aucune des <u>équations</u> vérifiées par le dispositif (dans les **coefficients** de l'équation – *t* apparaît évidemment dans le second membre de l'équation, qui est l'une des grandeurs électriques).

Il suffit de faire le changement de variable $t' = t - \frac{T}{4}$ pour constater que si *i* et u_L vérifient l'équation $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$, alors $\tilde{i}$ et $\tilde{u}_L$ aussi.

On peut vérifier que $\frac{d\tilde{i}}{dt}(t) = \frac{di}{dt}\left(t - \frac{T}{4}\right) \times 1$ (composée) : la dérivée est retardée de la même durée que la fonction, et bien sûr idem pour les dérivées d'ordre quelconque.

Un système physique est toujours invariant en pratique, sinon, cela signifierait que les lois qu'il vérifie dépendent du temps, donc que son fonctionnement change pendant qu'on est en train de l'étudier…
(C'est éventuellement possible : si l'on est train de le bousiller !!)