ALIMENTATION D'UNE LOCOMOTIVE ÉLECTRIQUE

A/ Caténaires simples

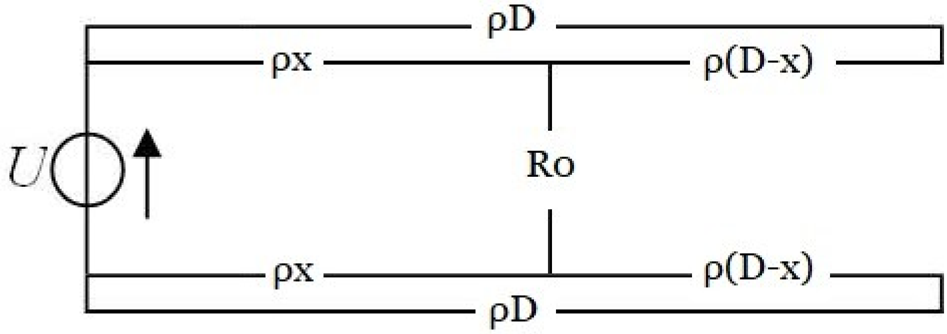
1. La source U alimente la locomotive de résistance R_0 et deux résistances ρx.
   La loi des mailles donne $U-2\rho x I-R_0 I=0$ soit $I=\dfrac{U}{R_0+2\rho x}$.

2. Il s'agit d'une fonction décroissante de x : I_{max} est donc obtenu pour $x=0$, soit $I_{max}=\dfrac{U}{R_0}$. Et de même, pour $x=D$, on trouve son minimum $I_{min}=\dfrac{U}{R_0+2\rho D}$.

3. On doit avoir $I_{max}-I_{min}<10\,\% I_{max}$ ou encore $I_{min}>90\,\% I_{max}$: $\dfrac{U}{R_0+2\rho D}>0{,}9\dfrac{U}{R_0}$ soit $R_0>0{,}9(R_0+2\rho D)$:
   $0{,}1\,R_0>1{,}8\,\rho D$ et finalement $D<\dfrac{R_0}{18\rho}=10\,\text{km}$

B/ Caténaires doubles

1. La résistance du brin qui n'est pas en contact avec le train vaut ρD ; elle est en série avec le tronçon de l'autre brin situé après le train, de résistance $\rho(D-x)$.



2. On fusionne ces deux résistances en série, ce qui donne $\rho(2D-x)$. Cette résistance est en dérivation avec le début du tronçon de résistance ρx.

   Leur association a donc pour conductance $\dfrac{1}{\rho(2D-x)}+\dfrac{1}{\rho x}=\dfrac{2D}{\rho x(2D-x)}$ et donc pour résistance $\dfrac{\rho x(2D-x)}{2D}$.

   Cette résistance est deux fois en série avec la locomotive, donc finalement : $R_{éq}=R_0+\dfrac{\rho x(2D-x)}{D}$.

3. D'après la loi des mailles sur le circuit simplifié, on a $U-R_{éq}I=0$, soit $I=\dfrac{U}{R_{éq}}$: U étant fixée, plus $R_{éq}$ est grande, plus I est faible.

4. Il s'agit d'une fonction de x du second degré : $\dfrac{dR_{éq}}{dx}=\dfrac{\rho}{D}[(2D-x)+x(-1)]=\dfrac{2\rho}{D}(D-x)$, qui est toujours positive sur l'intervalle $[0;D]$ et s'annule en D : l'intensité est donc strictement décroissante lorsque le train s'éloigne de la station.

   On a donc $I_{max}=I(x=0)=\dfrac{U}{R_0}$ et $I_{min}=I(x=D)=\dfrac{U}{R_0+\rho D}$.

   Le calcul est le même qu'au A/3, en remplaçant D par $D/2$: on obtient donc $D_{max}=20\text{ km}$ pour une baisse de l'intensité de 10% au pire. Même si l'on a doublé la longueur de câble, ce dispositif est très intéressant, car il permet de diviser par deux le nombre de sous-stations.

Synthèse d'un signal périodique

1. L'intensité est en convention générateur pour la source donc est fléchée vers le haut, les tensions u_R et u_C sont alors en convention récepteur.

   En RP, le condensateur est équivalent à un trou donc $i_\infty = 0$, puis $u_{R\infty} = 0$ (loi d'Ohm), et d'après la loi des mailles $u_{C\infty} = \mathrm{U_G}$.

2. La loi des mailles donne immédiatement $\mathrm{U_G} = u_C + u_R$, et grâce aux lois des dipôles : $\mathrm{U_G} = u_C + Ri = u_C + RC\dfrac{du_C}{dt}$. Sa forme canonique est alors $\tau\dfrac{du_C}{dt} + u_C = \mathrm{U_G}$ où l'on identifie $\tau = RC$.

3. La SP (on raye les dérivées temporelles) est $u_{CP} = \mathrm{U_G}$, et la SGH est $u_{CH}(t) = A\,e^{-t/\tau}$ où A est une constante quelconque.

   La SG est donc $u_C(t) = A\,e^{-t/\tau} + \mathrm{U_G}$ par le théorème de structure (ED linéaire).

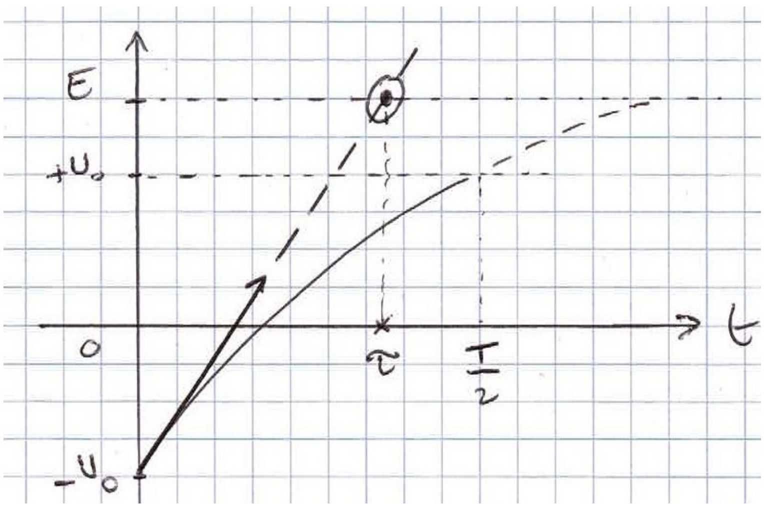
   On cherche A avec la CI : avant 0, C est déchargé, donc sa tension est nulle : $u_C(0_-) = 0$. Or la tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue : $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, donc $u_C(0_+) = 0$. En remplaçant, on obtient $A = -\mathrm{U_G}$, et finalement $u_C(t) = \mathrm{U_G}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Voir le cours pour le tracé.

4. On a $u_C(0) = A + B = -U_0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u_C(t) = B = +E$. On en déduit que $A = -(E + U_0)$: $u_C = E - (E + U_0)\,e^{-t/\tau}$.

   Sur la phase (2), on a de même $\lim\limits_{t\to+\infty} u_C(t) = B = -E$ et $u_C(0) = A + B = +U_0$: $u_C = -E + (E + U_0)\,e^{-t/\tau}$ qui est bien l'opposé de l'expression précédente.

   (Attention, on a réinitialisé la date : la véritable équation sur la phase (2) où $\dfrac{T}{2} \le t \le T$ est $u_C(t) = -E + (E + U_0)\exp\left(-\dfrac{t - T/2}{\tau}\right)$).

5. Attention à ne pas confondre la valeur maximale atteinte ici avec l'asymptote horizontale…

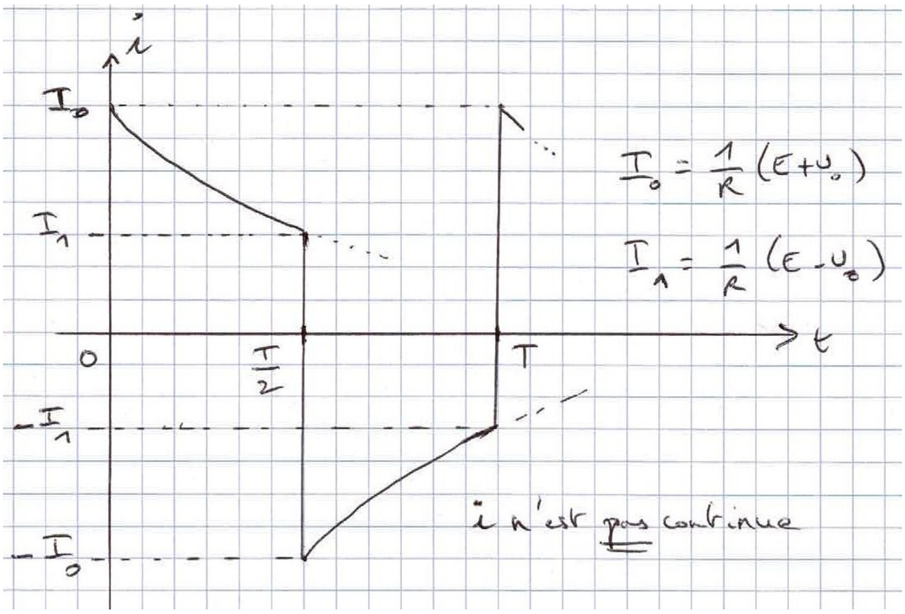


6. On doit donc résoudre $u_C = E - (E + U_0)\,e^{-t/\tau} = +U_0$. <u>Méthodo</u> : on élimine les signes moins le plus possible, donc $(E + U_0)\,e^{-t/\tau} = E - U_0$, puis $e^{-t/\tau} = \dfrac{E - U_0}{E + U_0}$ et $t = t_1 = -\tau \ln\dfrac{E - U_0}{E + U_0}$, qu'on simplifie avec les propriétés de ln : $t_1 = \tau \ln\dfrac{E + U_0}{E - U_0}$, et enfin $T = 2t_1 = 2\tau \ln\dfrac{E + U_0}{E - U_0}$.

7. On a par exemple (un peu plus simple que la dérivation de u_C) : $i=\frac{1}{R}(E-u_C)$, soit $i=\frac{1}{R}(E+U_0)e^{-t/\tau}$.

   On a bien sûr $i(0)=\frac{1}{R}(E+U_0)$; par ailleurs on a obtenu, à la date $t_1=\frac{T}{2}$, $e^{-t_1/\tau}=\frac{E-U_0}{E+U_0}$ donc $i(t_1)=\frac{1}{R}(E-U_0)$. Retenir cette <u>astuce fréquente</u> : il peut être très intéressant de remplacer un résultat à partir d'une étape intermédiaire de calcul, plutôt que de refaire à l'envers une partie d'un calcul déjà fait...

   Dans la phase (2), la courbe de u_C est l'opposé de celle de la phase (1), donc sa dérivée également, et *i* aussi d'après la loi du condensateur :



8. $E_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$. Quand $t=0$, on a $u_C=-U_0$, donc $E_C(0)=\frac{1}{2}C(-U_0)^2=\frac{1}{2}C\,U_0^2=E_C(t_1)$: l'énergie stockée reprend la même valeur.

   Au début de la phase (1), la tension du condensateur diminue en valeur absolue, donc son énergie stockée aussi : *C* fournit donc de l'énergie aux charges du circuit, il a donc un fonctionnement générateur.

   En fin de phase (1), la tension augmente et est positive, donc l'énergie stockée augmente : C reçoit de l'énergie des charges du circuit, il fonctionne en récepteur.

   C'est l'inverse lors de la phase (2) : quand la tension est positive (et diminue), C fonctionne en générateur, puis en récepteur dès que le signe de u_C change.

   On peut raisonner encore plus simplement en déterminant le signe du produit $u_C i=P_C$, puissance reçue : quand il est positif, *C* fonctionne en récepteur.

9. Avec un bilan énergétique évident, l'énergie fournie par le générateur se répartit entre la résistance et le condensateur. Mais d'après ce qui précède, au début et à la fin de la phase (1), l'énergie stockée dans le condensateur est la même. Pour obtenir l'énergie reçue par *R*, on peut donc intégrer par rapport au temps :

   - la puissance fournie par la source $P_f=E\,i$
   - la puissance Joule, reçue par la résistance $P_J=R\,i^2$

   → La première méthode est un peu plus simple (pas de carré donc pas de coefficient 2 dans l'exponentielle) : $P_f=\frac{1}{R}E(E+U_0)e^{-t/\tau}$, donc l'énergie fournie est en fonction du temps

   $E_f=-\frac{\tau}{R}E(E+U_0)e^{-t/\tau}+\lambda=-C\,E(E+U_0)e^{-t/\tau}+\lambda$, et, puisqu'on commence à fournir l'énergie à partir de la date nulle, $E_f(t)=CE(E+U_0)\left(1-e^{-t/\tau}\right)$.

De la même façon qu'à la question 7, $E_f(t_1)=CE(E+U_0)\left(1-\dfrac{E-U_0}{E+U_0}\right)=CE(E+U_0-(E-U_0))=2CEU_0$ #

→ Si l'on choisit la seconde méthode : $P_J=\dfrac{1}{R}(E+U_0)^2 e^{-2t/\tau}$ dont les primitives sont

$E_J=-\dfrac{\tau}{2R}(E+U_0)^2 e^{-2t/\tau}+\mu=-\dfrac{C}{2}(E+U_0)^2 e^{-2t/\tau}+\mu$, nulle à la date nulle, donc

$E_J=\dfrac{C}{2}(E+U_0)^2\left(1-e^{-2t/\tau}\right)=\dfrac{C}{2}(E+U_0)^2\left(1-\left[e^{-t/\tau}\right]^2\right)$, donc $E_J(t_1)=\dfrac{C}{2}(E+U_0)^2\left(1-\left[\dfrac{E-U_0}{E+U_0}\right]^2\right)$ où le dénominateur s'en va et où il reste les deux doubles produits des carrés :

$E_J(t_1)=\dfrac{C}{2}\left(2EU_0-(-2EU_0)\right)=2CEU_0$ # .

10. Quand β tend vers 0, $f(\beta)$ tend vers $\ln(1)=0$: la courbe en trait plein est donc celle de *f*.

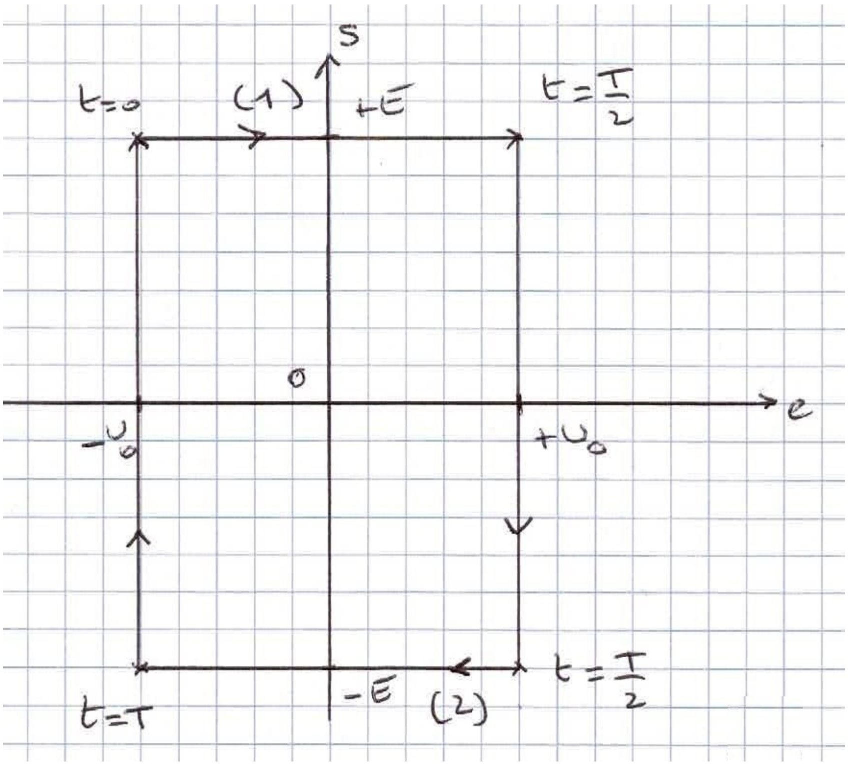
On a obtenu la période du signal $T=2\tau\ln\dfrac{E+U_0}{E-U_0}=2\tau\ln\dfrac{1+U_0/E}{1-U_0/E}=2\tau f(\beta)$, il faut donc résoudre $f(\beta)=1$, ce qu'on pourrait faire littéralement, mais on lit aisément sur la courbe que cette valeur est obtenue pour $\beta=0{,}46$.

On lit au passage que $g(0{,}46)=0{,}92$.

Pendant la phase (2), les signes de *i* et de U_G ont tous les deux changé, ce qui donne la même puissance fournie par le générateur sur cette phase que pendant la phase (1). Comme la durée est la même pour les deux phases, on peut raisonner sur la phase (1) seule $\langle P_G\rangle=\dfrac{E_J}{T/2}$, où E_J a été calculée à la question 9.

Donc, $\langle P_G\rangle=\dfrac{2CEU_0}{\tau f(\beta)}=\dfrac{2C}{RC}\dfrac{E(\beta E)}{\tau f(\beta)}=\dfrac{E^2}{R}g(\beta)$: finalement $k=0{,}92$.

11. Pendant la phase (1), la tension d'alimentation du circuit RC est $s=+E$, qui doit donc être la valeur de la sortie du comparateur ; $u_C=e$ varie alors de $-U_0$ pour $t=0$ à $+U_0$ pour $t=T/2$, d'où les dates et le sens de fléchage. La date reste la même lors du saut de s vers la tension $-E$, puisque la bascule est supposée instantanée. Le sens de parcours est ensuite opposé, puisque u_C décroît.



PISCINE : DÉTECTEUR DE NIVEAU D'EAU CAPACITIF

1. Avec les complexes : en dérivation, les admittances s'ajoutent, on a donc l'admittance équivalente $\underline{Y}_{\text{éq}}=j\omega C_1+j\omega C_2=j\omega(C_1+C_2)$. Le dipôle équivalent vérifie donc bien la loi du condensateur, avec comme capacité la somme des deux capacités.

   Dans les réels : on a la même tension, et le courant vérifie la loi des nœuds : $i=i_1+i_2=C_1\frac{du}{dt}+C_2\frac{du}{dt}=(C_1+C_2)\frac{du}{dt}$, même conclusion.

2. On applique l'expression donnée : $C=\frac{\varepsilon_0}{e}(S_1+\varepsilon_r S_2)=\frac{\varepsilon_0 L}{e}(H-x+\varepsilon_r x)=\frac{\varepsilon_0 L}{e}[H+(\varepsilon_r-1)x]$.

3. On a les lois, avec des orientations évidentes : $\begin{cases} e=u+u_C \\ u=Ri \\ i=C\frac{du_C}{dt} \end{cases}$.

   Attention ici : on cherche une ED sur la variable u, il faut dériver la loi des mailles (ce que suggère aisément l'énoncé) : $\frac{de}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{du_C}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{i}{C}$, donc $\frac{de}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{u}{RC}$, qui est bien l'équation demandée en multipliant tout par $\tau=RC$.

4. On remplace dans l'ED donnée : $RC\,j\omega A e^{j\omega t}=RC\,j\omega \underline{U}_0 e^{j\omega t}+\underline{U}_0 e^{j\omega t}$.

   L'exponentielle complexe ne s'annulant pas $\underline{U}_0=A\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$

5. L'amplitude du signal est le module de l'amplitude complexe ou de la représentation complexe : $U_0=A\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$.

6. Basse fréquence donc $\omega=2\pi f$ est petite, et on peut alors négliger $(\omega RC)^2$ devant 1 : on a alors $U_0=A\omega RC$.

7. En remplaçant C par sa valeur, on voit que l'amplitude de la tension mesurée varie en fonction de x de façon affine : en obtient donc aisément x à partir de l'amplitude mesurée et des constantes connues.

   En général, on procède à une calibration du capteur en mesurant $U_{00}=U_0(x=0)$ quand la piscine est vide, et $U_{0H}=U_0(x=H)$ quand la piscine est pleine.

   Sans calcul, la loi affine du capteur est donc $U_0(x)=U_{00}+\frac{x}{H}(U_{0H}-U_{00})$ qu'on inverse facilement pour obtenir x.