TD 7 – Régime sinusoïdal forcé

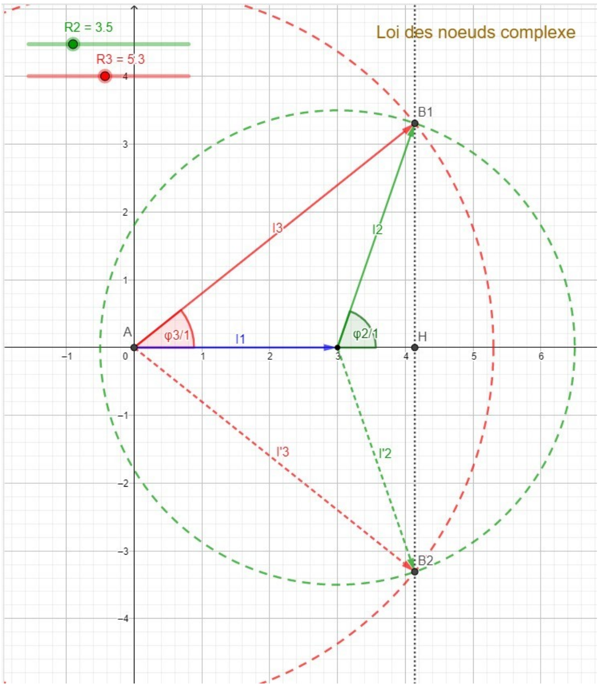
1. Loi des nœuds

a) On peut prendre le vecteur $\vec{I}_1$ horizontal (phase nulle) : cela ne changera pas les déphasages entre les courants (rotation globale de la figure de Fresnel sinon).

La loi des nœuds devient pour les vecteurs de Fresnel $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_3$: pour construire les deux vecteurs inconnus dont on connaît la norme, on trace deux cercles, le premier de centre l'extrémité de $\vec{I}_1$, de rayon $I_2 = 4$, et le second de centre l'origine de $\vec{I}_1$, de rayon $I_3 = 5$.

On voit qu'il y a deux solutions possibles : $\varphi_{2/1} = \pm 90\,°$, et $\varphi_{3/1}$, de même signe que $\varphi_{2/1}$, tel que $\tan\varphi_{3/1} = \pm\dfrac{I_2}{I_1} = \pm\dfrac{4}{3}$, donc $\varphi_{3/1} = \pm 53{,}1\,°$

b) On aura toujours les deux solutions : raisonnons dans le cas des déphasages positifs.



On peut utiliser le théorème d'Al-Kashi, qui s'appuie sur l'angle $\pi - \varphi_{2/1}$ ou bien utiliser la méthode suivante (classique en PSI), qui revient à une démonstration de ce théorème :

On a $H\,B_1 = I_2 \sin\varphi_{2/1} = I_3 \sin\varphi_{3/1}$, et par ailleurs $I_3\cos\varphi_{3/1} - I_2\cos\varphi_{2/1} = I_1$, système duquel il faut éliminer l'angle $\varphi_{3/1}$:

$I_3^2 \cos^2\varphi_{3/1} = (I_1 + I_2\cos\varphi_{2/1})^2$,
$I_3^2 \sin^2\varphi_{3/1} = I_2^2 \sin^2\varphi_{2/1}$

(méthode d'élimination à connaître impérativement)

donc $I_3^2 = (I_1 + I_2\cos\varphi_{2/1})^2 + I_2^2\sin^2\varphi_{2/1} = I_1^2 + 2\,I_1 I_2 \cos\varphi_{2/1} + I_2^2\cos^2\varphi_{2/1} + I_2^2\sin^2\varphi_{2/1}$ soit $I_3^2 = I_1^2 + 2\,I_1 I_2\cos\varphi_{2/1} + I_2^2$, qui aboutit bien au résultat demandé.

2. Circuit RL (théorie)

La loi des mailles est $e(t)=u_R(t)+u_L(t)$, donc pour les amplitudes complexes $\underline{E}=\underline{U}_R+\underline{U}_L$, avec $\underline{U}_R=R\underline{I}$ et $\underline{U}_L=j\omega L\underline{I}=j\omega\frac{L}{R}\underline{U}_R$, donc $u_L(t)$ est en avance de 90° sur $u_R(t)$.

Les trois vecteurs de Fresnel dessinent encore un triangle rectangle d'hypoténuse $\vec{E}$, mais cette fois le déphasage de $u_R(t)$ donc de $i(t)$ sur $e(t)$, noté φ, est nécessairement négatif.

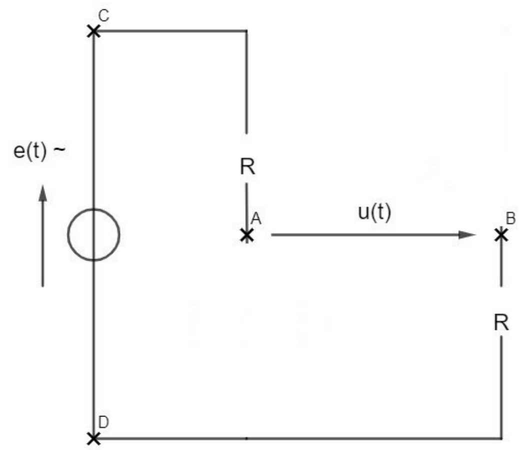
On obtient avec la loi des mailles $\underline{I}=\frac{\underline{E}}{j\omega L+R}$ (on peut aussi raisonner avec $\underline{U}_R$, et utiliser directement un diviseur de tension).

On en déduit $\operatorname{Arg}\underline{I}=\operatorname{Arg}\underline{E}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$, soit $\varphi=\operatorname{Arg}\underline{I}-\operatorname{Arg}\underline{E}=-\operatorname{Arctan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$, qui tend vers 0 en TBF et -90° en THF et vaut exactement -45° pour $\omega=\omega_0=\frac{1}{\tau}=\frac{R}{L}$, τ étant la constante de temps de l'équadiff d'ordre 1.

3. Double circuit RC

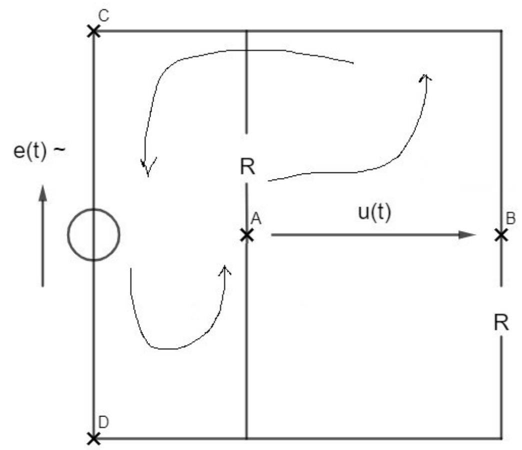
a) TBF :

Le courant étant nul dans les résistances, on trouve avec la loi des mailles $u(t)=-e(t)$



THF :

En utilisant la maille dessinée, on a immédiatement $u(t)=+e(t)$



Si l'on ne trouve pas cette maille, les tensions aux bornes des résistances s'obtiennent aisément en THF.

b) Chacune des branches contient les mêmes dipôles, et est alimentée par la même tension $e(t)$: les courants et les tensions seront donc identiques.

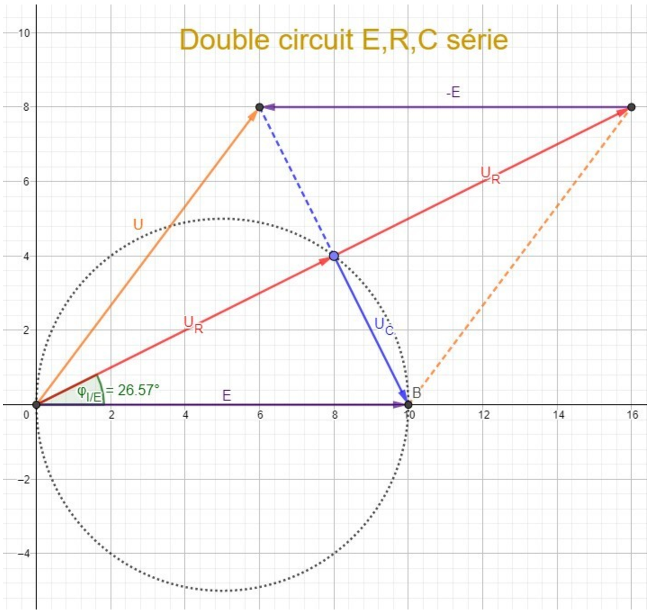
Le diagramme de Fresnel est exactement celui du cours (circuit E,RC série).

c) $\underline{U}_R=\underline{E}\dfrac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega RC}}=\underline{E}\dfrac{1}{1-\dfrac{j}{\omega\tau}}$, avec $\tau=RC$

$\operatorname{Arg}\underline{U}_R=\operatorname{Arg}\underline{E}-\operatorname{Arg}\left(1-\dfrac{j}{\omega\tau}\right)$ donc $\varphi=\operatorname{Arg}\underline{U}_R-\operatorname{Arg}\underline{E}=+\operatorname{Arg}\left(1+\dfrac{j}{\omega\tau}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\omega\tau}\right)$.

d) C'est la même maille que celle dessinée en TBF (question a), avec les condensateurs présents, ce qui ne change rien : en tournant dans le sens horaire, on a $+e(t)-u_R(t)+u(t)-u_R(t)=0$

e) La figure dessinée est un losange : $u(t)$ et $e(t)$ ont donc la même amplitude, et on lit $u(t)=e(t)-2u_C(t)$ en suivant l'autre diagonale.

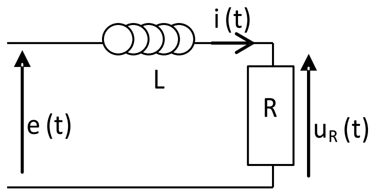


On retrouve cette relation en suivant la maille (dessinée en THF) : $-e(t)+u_C(t)+u(t)+u_C(t)=0$

f) Comme la figure est un losange, on a $\varphi_U=2\varphi=2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\omega\tau}\right)$, qui varie entre 0 en THF et 180° en TBF.

On parle de « déphaseur pur » car le déphasage de u par rapport à e dépend de la fréquence, mais l'amplitude reste constante, égale à celle de e.

4. Circuit RL (oscilloscope)



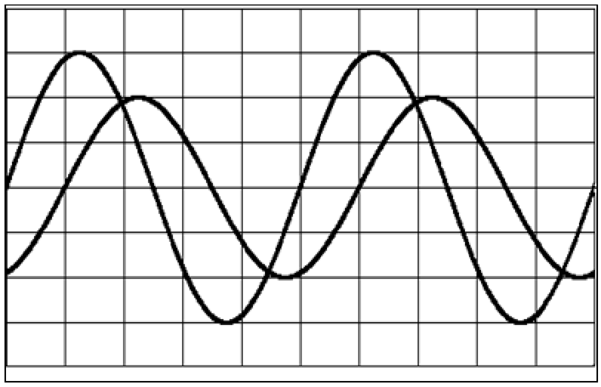
(a) $\underline{Z} = j\omega L + R$

(b) $\underline{I} = \dfrac{E}{j\omega L + R}$

(c) $I_0 = |\underline{I}| = \dfrac{E}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ et la phase à l'origine de $i(t)$ est

$-\varphi = \text{Arg}\,\underline{I} = -\,\text{Arctan}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)$

(d)



- Une période dure 5 divisions, donc $T = 5{,}0\ \text{ms}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1257\ \text{rad/s}$
- Celle qui est en avance est celle qui a une amplitude de 3 divisions, et c'est $e(t)$, puisque $u_R(t) = R\,i(t)$ retarde sur $e(t)$ (phase à l'origine négative), donc $E = 3{,}0\ \text{V}$.

On mesure au passage $U_R = 2\times 0{,}5\ \text{V} = 1{,}0\ \text{V}$

- Le déphasage de $e(t)$ par rapport à $i(t)$ est donc φ. On lit l'avance temporelle de $e(t)$ sur $u_R(t)$: $\tau = 1\ \text{ms} = 0{,}2\ \text{T}$, donc $\varphi = 0{,}2\times 360\,° = 72\,°$
- $L = \dfrac{R}{\omega}\tan\varphi = 245\ \text{mH}$. On doit avoir $U_R = \dfrac{R\,E}{\sqrt{R^2\tan^2\varphi + R^2}} = E\cos\varphi$ car $1+\tan^2\varphi = \dfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$: $E\cos\varphi = 3\ \text{V}\quad \cos 72\,° = 0{,}93\ \text{V} \approx 1\ \text{V}$, acceptable à la précision de lecture du graphique.

5. Impédance équivalente

(a) En TBF, les bobines sont des fils, et et C un interrupteur ouvert : $\underline{Z}_{\text{TBF}} = R$.

En THF, c'est l'inverse ; la première bobine ouvre le circuit : $\underline{Y}_{\text{THF}} = 0$, donc l'impédance est infinie.

(b) On a $Z = Z\{L\,\text{série}\,[C\,//\,(L\,\text{série}\,R)]\}$: $\underline{Z}(L\ \text{série}\ R) = R + j\,L\,\omega$, puis

$\underline{Z}[C\,/\,/(L\ \text{série}\,R)] = \left(j\,C\,\omega + \dfrac{1}{R + j\,L\,\omega}\right)^{-1} = \dfrac{R + j\,L\,\omega}{1 - L\,C\,\omega^2 + j\,R\,C\,\omega}$ et donc

$\underline{Z} = j\,L\omega + \dfrac{R + j\,L\omega}{1 - LC\,\omega^2 + j\,RC\,\omega} = \dfrac{R(1 - LC\,\omega^2) + j\,L\omega\,(2 - LC\,\omega^2)}{1 - LC\,\omega^2 + j\,RC\,\omega}$

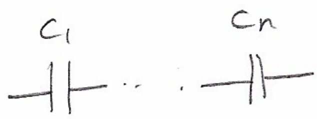
(c) Pour que $\underline{Z} = R$, il faut que $R(1 - LC\,\omega^2) + j\,L\omega\,(2 - LC\,\omega^2) = R(1 - LC\,\omega^2) + j\,R^2C\,\omega$ soit $L\,(2 - L\,C\,\omega^2) = R^2C$.

(d) Ce n'est possible que si $L\,C\,\omega^2 = 2 - \dfrac{R^2C}{L} > 0$ donc $\boxed{R^2C < 2L}$

6. Association de dipôles de même nature

Dipôles de même nature

Condensateurs



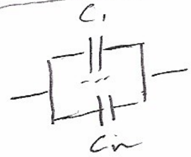
* en série :

$$\underline{Z} = \Sigma \underline{Z}_k \ : \quad \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} + \dots + \frac{1}{j\omega C_n} = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)$$

qu'on peut écrire sous la forme $\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_{éq}}$

avec $\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}}$

* en dérivation :



$\underline{Y} = \Sigma \underline{Y}_k$:

$$\underline{Y} = j\omega C_1 + \dots + j\omega C_n = j\omega C_{éq} \quad \text{avec} \quad \boxed{C_{éq} = C_1 + \dots + C_n}$$

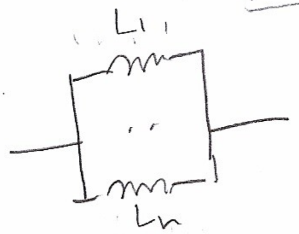
Bobines

* en série

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j\omega L_1 + r_1 + \dots + j\omega L_n + r_n \\ &= j\omega(L_1 + \dots + L_n) + (r_1 + \dots + r_n) \\ &= j\omega L_{éq} + r_{éq} \end{aligned}$$

avec $\boxed{\begin{cases} r_{éq} = \Sigma r_k \\ L_{éq} = \Sigma L_k \end{cases}}$

* idéales, en dérivation

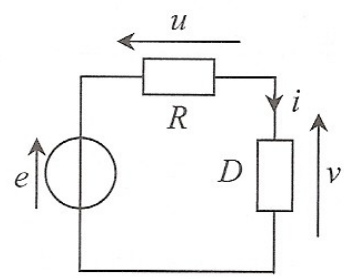


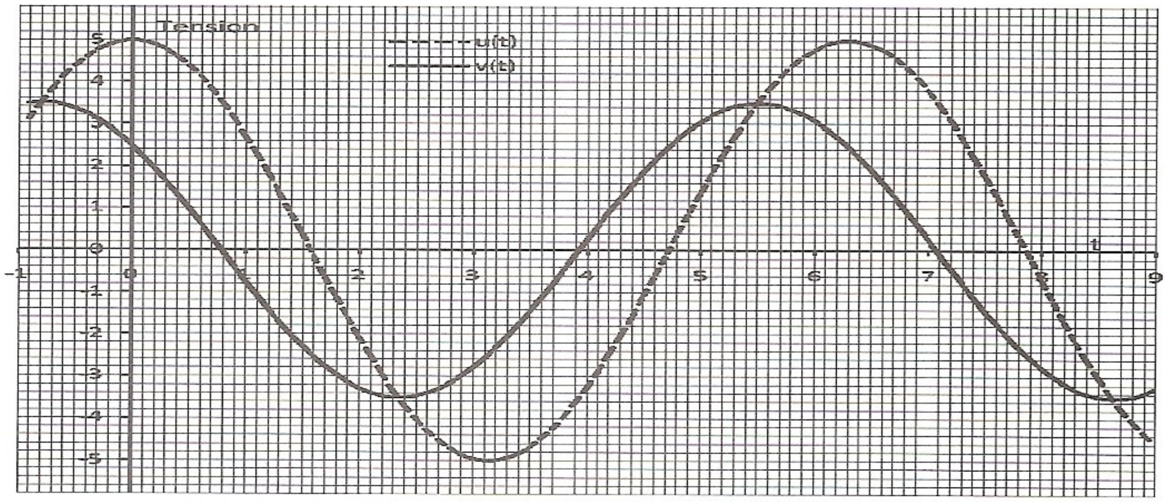
$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{j\omega L_1} + \dots \frac{1}{j\omega L_n} = \frac{1}{j\omega L_{éq}} \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{éq}} = \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_n}}$$

7. Quel dipôle ?

Dans le montage suivant, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, R est une résistance et D un dipôle inconnu. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ les tensions aux bornes respectivement de R et D.
On visualise à l'oscilloscope $v(t)$, $u(t)$ et on obtient le graphe suivant.





L'unité de l'axe des temps est 10^{-2} s et celle de l'axe des tensions est 1 V. On utilise ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D, sachant que $R = 100\ \Omega$.

1. Déterminer V_m, U_m ainsi que la pulsation ω des signaux utilisés.

2. La tension v est-elle en avance ou en retard sur la tension u ? En déduire le signe de φ. Déterminer la valeur de φ à partir du graphe.

3. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle D.

a) Déterminer à partir des résultats précédents les valeurs de X et Y.

b) Par quel dipôle (condensateur, bobine...) peut-on modéliser D ? Donner ses caractéristiques.

1. On lit $U_m = 5\ \text{V}$ et $V_m = 3{,}5\ \text{V}$. La période est $T = 6{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{s} = 2\pi 10^{-2}\ \text{s}$, la pulsation est donc $\omega = 100\ \text{rad/s}$.
2. v est maximale avant u : sa phase à l'origine $\varphi_v = \varphi_{v/u} = \varphi$ est donc positive (dans le domaine principal). On lit que l'avance temporelle τ de v sur u est de 1/8ème de période (1/4 d'une demi période), donc $\varphi = \frac{1}{8} 2\pi = \frac{\pi}{4}\ \text{rad} = 45°$ - on peut utiliser également $\varphi = \omega\tau$.
3. a) On écrit les lois, avec les représentations complexes pour changer :

   Maille : $\underline{e} = \underline{u} + \underline{v}$

   Dipôles : $\underline{u} = R\underline{i}$; $\underline{v} = \underline{Z}\underline{i}$.

   Comme nous connaissons les caractéristiques de u et de v, mais pas celles de i, le plus simple est de faire le rapport $\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}}{R}$, donc $\frac{\underline{Z}}{R} = \frac{V_m \operatorname{expj}(\omega t + \varphi)}{U_m \operatorname{expj}(\omega t)} = \frac{V_m}{U_m} \operatorname{expj}(\varphi)$ donc

   $\underline{Z} = 0{,}70\ \operatorname{expj}(45°) \times 100\ \Omega$ avec $\operatorname{expj}(45°) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, donc $\underline{Z} = (50 + 50j)\ \Omega$

   b) On reconnaît une forme possible $\underline{Z} = R' + j\omega L$, donc une bobine réelle de résistance interne $R' = 50\ \Omega$ (!!) et d'inductance $L = 0{,}50\ \text{H}$.

8. Circuit en régime sinusoïdal forcé

Circuit en régime sinusoïdal forcé

1. Pour trouver $I_m = |\underline{i}(t)|$, on fusionne les impédances $\rightarrow \underline{Z}$ et on aura ainsi $\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}$ donc $I_m = \dfrac{U_m}{|\underline{Z}|}$

$L // R$: $\dfrac{1}{\underline{Z}_1} = \dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R} \iff \underline{Z}_1 = \dfrac{j\omega LR}{R + j\omega L}$

$\underline{Z}_1$ série C : $\underline{Z} = \dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{j\omega LR}{R + j\omega L}$

$$= \frac{(R + j\omega L) + j\omega C\,(j\omega LR)}{j\omega C\,(R + j\omega L)}$$

qu'on ne développe surtout pas : on veut le module.

$$= \frac{R + j\omega L - \omega^2 RLC}{j\omega C\,(R + j\omega L)}$$

Vers forme algébrique au numérateur, pour pouvoir calculer le module.

$$\underline{Z} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{j\omega C\,(R + j\omega L)} : |\underline{Z}| = \frac{1}{\omega C}\frac{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Pour que $|\underline{Z}|$ soit indépendante de R, donc ne change pas quand R change, on doit avoir $(1 - \omega^2 LC)^2 = 1$. On peut dériver par rapport à R et poser $\dfrac{d|\underline{Z}|}{dR} = 0$, mais c'est long.

$$(1 - \omega^2 LC)^2 = 1 \iff \begin{cases} 1 - \omega^2 LC = 1 \\ \text{ou} \\ 1 - \omega^2 LC = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \iff \omega = 0 : \text{non, on est en sinusoïdal} \\ \\ \iff \boxed{\omega^2 LC = 2} \end{matrix}$$

2. On a alors $\underline{Z} = \dfrac{-R + j\omega L}{j\omega C(R + j\omega L)}$ puisque $1 - \omega^2 LC = -1$

$I_m = \dfrac{U_M}{|\underline{Z}|} = \omega C U_M$ et $\operatorname{Arg} \underline{u} = \operatorname{Arg} \underline{Z} + \operatorname{Arg} \underline{i}$: $0 = \operatorname{Arg} \underline{Z} + \varphi$

donc $\operatorname{Arg} \underline{Z} = -\varphi$: $\operatorname{Arg} \underline{Z} = \pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{\omega L}{-R} \underbrace{- \dfrac{\pi}{2}}_{\operatorname{Arg} j} - \operatorname{Arctan} \dfrac{\omega L}{R}$

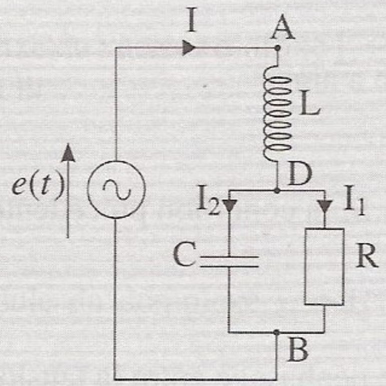
donc $\varphi = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{\pi}{2}$

3. $\varphi = 0 \iff \dfrac{\omega L}{R} = \tan \dfrac{\pi}{4} = 1 : \omega L = R$

$\iff \dfrac{2}{\omega C} = R : \boxed{RC\omega = 2}$

9. Association RLC

Le dipôle AB représenté sur le schéma de la figure est alimenté par une source de tension parfaite de force électromotrice instantanée $e(t) = \mathrm{E}_0 \sin(\omega t)$.



1. Exprimer L en fonction de R, C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq}.

2. Calculer L sachant que $\mathrm{R} = 100\ \Omega$, $\mathrm{C} = 100/3\ \mu\mathrm{F}$ et $\omega = 400\ \mathrm{rad.s}^{-1}$.

3. L'amplitude de la force électromotrice du générateur vaut $\mathrm{E}_0 = 180$ V. Calculer l'amplitude de l'intensité du courant I dans la bobine.

4. Calculer les amplitudes des différences de potentiel U_{AD} et U_{DB}.

5. Calculer les amplitudes des intensités des courants I_1 et I_2 circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.

ENAC 2004

1. On cherche l'impédance équivalente au dipôle AB : $\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_{\text{L}} + \underline{Z}_{\text{C//R}}$ avec $\underline{Y}_{\text{C//R}} = j\omega C + \frac{1}{R}$ donc $\underline{Z}_{\text{C//R}} = \frac{R}{1+j\omega RC}$ soit $\underline{Z}_{\text{éq}} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega RC}$.

   Pour que ce soit une résistance pure, réelle, la partie imaginaire du second terme doit être égale à $-\omega L$: $\mathrm{Im}\left(\frac{R(1-j\omega RC)}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right) = -\omega L$, donc $L = \frac{R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}$.

   On obtient en même temps $R_{\text{éq}} = \frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2}$
2. Avec les conversions des préfixes, on obtient $1+\omega^2 R^2 C^2 = 2{,}778$, puis $L = 0{,}12\ \mathrm{H}$.
3. De même $R_{\text{éq}} = 36{,}0\ \Omega$ donc $I = 5{,}00\ \mathrm{A}$.
4. $U_{\text{AD}} = L\omega I = 240\ \mathrm{V}$ et $U_{\text{DB}} = |\underline{Z}_{\text{C//R}}| I = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} I = 300\ \mathrm{V}$
5. $I_1 = \frac{U_{\text{DB}}}{R} = 3{,}00\ \mathrm{A}$ et $I_2 = \omega C\, U_{\text{DB}} = 4{,}00\ \mathrm{A}$

On remarque que les amplitudes des courants ne s'ajoutent pas (loi des nœuds), pas plus que les amplitudes des tensions (loi des mailles).

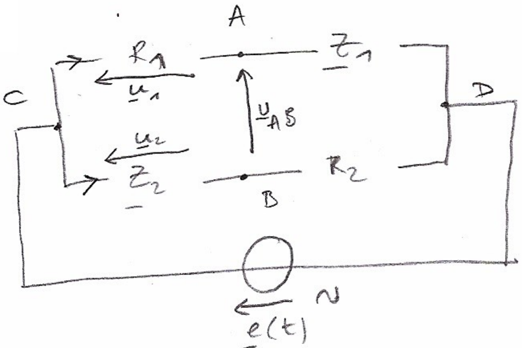
Avec un diagramme de Fresnel, on obtient des triangles rectangles : on peut vérifier que les amplitudes vérifient le théorème de Pythagore.

Exo : reprendre l'étude avec Fresnel, en prenant comme référence $\vec{U}_{\text{DB}}$, et en introduisant $\varphi = \varphi_{i/i1}$ – on trouve $\tan\varphi$ en fonction de R, C et ω, puis toutes les tensions en fonction de φ et de E.

10. Détermination des caractéristiques d'une bobine inconnue

Bobine inconnue

1.



avec $\underline{Z}_2 = r + j\omega L$ et $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_C + \underline{Y}_R$: $\frac{1}{\underline{Z}_1} = j\omega C + \frac{1}{R}$

donc $\underline{Z}_1 = \frac{R}{1+j\omega RC}$

Maille de gauche (+) : $\underline{u}_{AB} + \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = 0 \iff \underline{u}_{AB} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1$

+ 2 Diviseurs de tension, sur chaque branche soumise à la tension $e(t)$:

$$\underline{u}_{AB} = \left(\frac{\underline{Z}_2}{R_2 + \underline{Z}_2} - \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_1} \right) \underline{e}(t)$$

Il n'y aura pas de simplification (tout est différent dans chaque terme) : inutile de remplacer.

2. $\underline{u}_{AB} = 0 \iff \frac{\underline{Z}_2}{R_2 + \underline{Z}_2} = \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_1} \iff (R_1 + \underline{Z}_1)\underline{Z}_2 = R_1 (R_2 + \underline{Z}_2)$

$$\iff \cancel{R_1 \underline{Z}_2} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R_1 R_2 + \cancel{R_1 \underline{Z}_2}$$

Donc $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{R(r + j\omega L)}{1 + j\omega RC} = R_1 R_2$

$$\iff R(r + j\omega L) = R_1 R_2 (1 + j\omega RC)$$

Deux complexes sont égaux si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales :

$$\begin{cases} Rr = R_1 R_2 \\ \omega L R = \omega R R_1 R_2 C \end{cases} : \boxed{\begin{array}{l} r = \frac{R_1 R_2}{R} \\ L = R_1 R_2 C \end{array}}$$