TD 9 TRANSITOIRES (2)

1. Optimisation d'un circuit (R,L,C) série

On peut redonner le résultat du cours ou refaire la démarche.

La loi des mailles donne $u_C+u_L+u_r+u_R=0$ soit $\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}+(R+r)i=0$.

Or $i=\frac{dq}{dt}$ donc $L\frac{d^2q}{dt^2}+(R+r)\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$, qu'on écrit sous forme canonique $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0$ avec par identification $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ et $Q=\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

On sait que le régime permanent est atteint le plus rapidement en régime critique, tel que l'équation caractéristique n'a qu'une solution (discriminant nul), ce qui conduit à $Q=\frac{1}{2}$ soit $\boxed{R=2\sqrt{\frac{L}{C}}-r}$ (on peut calculer le Δ de l'EC de l'ED sous forme brute, sans passer par λ ou Q).

AN : $R=2\sqrt{\frac{1\,\text{mH}}{100\,\text{nF}}}-5\,\Omega=2\sqrt{\frac{1000\,\mu\text{H}}{0{,}100\,\mu\text{F}}}-5\,\Omega$ soit $R=195\,\Omega$

2. Équation différentielle pour l'intensité dans un circuit (R,L,C) série

(a) On obtient avec la charge par exemple $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$, qu'il faut dériver pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par i : c'est la même équation $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$

(b) À cette date, l'intensité doit être continue à cause de la bobine : $i=0$
On en déduit que $u_R=Ri=0$.
La tension u_c est également continue : $u_C=\frac{q_0}{C}$.
La loi des mailles donne donc $u_L+u_C+u_R=0$ donc $u_L=-\frac{q_0}{C}$.
La loi de la bobine donne $u_L=L\frac{di}{dt}$ donc $\frac{di}{dt}=-\frac{q_0}{LC}$.
L'équation différentielle donne $\frac{d^2i}{dt^2}=-\frac{R}{L}\frac{di}{dt}-\frac{1}{LC}i$ donc $\frac{d^2i}{dt^2}=\frac{Rq_0}{L^2C}$

(c) $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc régime pseudopériodique (avec oscillations très peu visibles car proche de 0,5)

3. Réponse d'un circuit bouchon à un échelon de courant

(a) L'intensité est continue dans la bobine donc $i_L(0^+)=0$.
La tension est continue dans le condensateur donc $u(0^+)=0$, et c'est la même que celle aux bornes de la résistance : la loi d'Ohm nous dit donc que $i_R(0^+)=0$.
Finalement, la loi des nœuds donne $i_C(0^+)=i_0$.

(b) D'après la loi de la bobine, sa tension aux bornes est nécessairement nulle, puisque c'est une dérivée temporelle : $u(\infty)=0$.

On en déduit d'après la loi d'Ohm $i_R(\infty)=0$.

u étant nulle quel que soit *t*, sa dérivée temporelle aussi : $i_C(\infty)=0$.

Finalement c'est $i_L(\infty)=i_0$.

(c) Nous avons la loi des nœuds et le lois des composants $\begin{cases} i_R+i_L+i_C=i_0 \\ u=Ri_R \\ u=L\dfrac{di_L}{dt} \\ u=\dfrac{q}{C} \end{cases}$. La bobine nous oblige à dériver la loi des nœuds $\begin{cases} \dfrac{di_R}{dt}+\dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{di_C}{dt}=0 \\ \dfrac{di_R}{dt}=\dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{u}{L} \\ \dfrac{di_C}{dt}=C\dfrac{d^2u}{dt} \end{cases}$ donc $\boxed{C\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{1}{L}u=0}$

(d)

La forme canonique est $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0$ avec $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=10000\,\text{rad/s}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{1}{RC}$

soit $Q=R\sqrt{\dfrac{C}{L}}=10>0{,}5$: le régime est donc pseudopériodique.

<u>Attention</u> : l'expression de *Q* est l'inverse de celle obtenue pour un circuit RLC série, qui n'est donc pas générale, et donc pas à connaître par cœur.

Voir le cours : on trouve comme racines $r=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}=-\dfrac{\omega_0}{20}\pm j\omega$ avec

$\omega=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}\approx\omega_0$ car $1/400\ll 1$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$u(t)=\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{20}\right)[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]$

Nous savons que $u(0^+)=0$ donc $A=0$: $u(t)=B\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{20}\right)\sin(\omega t)$.

La limite de u à l'infini ne donne aucune information : il nous faut une autre condition aux limites, la dérivée temporelle de u .

Le condensateur nous donne $\dfrac{du}{dt}(0^+)=\dfrac{i_0}{C}$.

Dérivons la solution trouvée $\dfrac{du}{dt}=B\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{20}\right)\left[\omega\cos(\omega t)-\dfrac{\omega_0}{20}\sin(\omega t)\right]$: on en déduit que $B\omega=\dfrac{i_0}{C}$ soit $\boxed{u(t)=\dfrac{i_0}{C\omega}\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{20}\right)\sin(\omega t)}$

4. Résolutions complètes du circuit RLC série : entraînement

a) Excitation échelon et régime apériodique critique : $\Delta=0$ donc $\omega_0=\lambda$ et $u=(At+B)\exp(-\lambda t)+E$ avec $u(0)=B+E=0$ donc $B=-E$.

$\dfrac{du}{dt}=A\exp(-\lambda t)+(At+B)(-\lambda\exp(-\lambda t))$ avec $\dfrac{du}{dt}(0)=A-\lambda B=0$ donc $A=-\lambda E$.

Finalement $u=-E(\lambda t+1)\exp(-\lambda t)+E$ et en remplaçant (déjà calculée) :
$\dfrac{du}{dt}=-\lambda E\exp(-\lambda t)-E(\lambda t+1)(-\lambda\exp(-\lambda t))=Ee^{-\lambda t}(\lambda(\lambda t+1)-\lambda)=E\lambda^2 t e^{-\lambda t}$ qui est strictement positive sauf en $t=0$: *u* est une fonction strictement croissante de *t*.

b) Excitation échelon et $Q=1/4$; une fois la solution obtenue, vérifier **de tête** que les deux CI sont correctes, et prouver qu'elle est strictement croissante.

c) L'EC est donc $r^2+\omega_0\sqrt{2}r+\omega_0^2=0$ donc $\Delta=-2\omega_0^2=(j\sqrt{2}\omega_0)^2$ et les deux racines sont $r_{1/2}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm j\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\omega_0$ et la solution générale est

$$u_C(t)=e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}\left[A\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)+B\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)\right] .$$

Les CI donnent $A=U_0$ et $\dfrac{du_C}{dt}(0)=1\times\left(-\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}A\cos 0+B\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}\cos 0\right)$ (premier terme : l'exp est dérivée et pas le reste, deuxième terme : le sin est dérivé et pas l'exp – on ne regarde que ce qui donne « cos » lors de la dérivation) qui est nulle donc $A=B$:

$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)+\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)\right]=U_0\sqrt{2}e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t-\frac{\pi}{4}\right)$$

d) L'EC est donc $r^2+\omega_0 r+\omega_0^2=0$ donc $\Delta=-3\omega_0^2=(j\sqrt{3}\omega_0)^2$ et les racines sont $r_1=\dfrac{1}{2}(-1+j\sqrt{3})\omega_0$ et $r_2=\dfrac{1}{2}(-1-j\sqrt{3})\omega_0$.

La SGH est donc $u_C(t)=e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t}\left[A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)+B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]+E$.

La CI de valeur donne immédiatement $A=-E$ et celle de la dérivée donne
$\dfrac{du_C}{dt}(0)=0=1\times\left(-\dfrac{1}{2}A\omega_0\cos 0+B\omega_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 0\right)$ donc $B=\dfrac{A}{\sqrt{3}}=-\dfrac{E}{\sqrt{3}}$.

On en déduit $u_C(t)=E-Ee^{-\frac{1}{2}\omega_0 t}\left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]$ soit

$u_C(t)=E-U_{Cm}e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t+\varphi\right)$ avec $U_{Cm}\cos\varphi=1$ et $-U_{Cm}\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donc

$U_{Cm}^2=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow U_{Cm}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $\cos\varphi=\dfrac{1}{U_{Cm}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\sin\varphi<0$: $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

On vérifie : $u_C(0)=E-\dfrac{2}{\sqrt{3}}E\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

(On peut faire comme dans le cours et travailler avec un signe +, cela donne un φ différent.)

e) $Q<1/2$ donc régime apériodique, ce qu'on retrouve avec l'EC : $r^2+3\omega_0 r+\omega_0^2=0$ de $\Delta=5\omega_0^2>0$.

Allure de la solution : valeur initiale nulle et tangente initiale vers le haut, avec une limite à l'infini nulle (pas de SP) donc un maximum seulement car pas d'oscillations.

On a $u=A_1 e^{r_1 t}+A_2 e^{r_2 t}$ avec $r_1=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})\omega_0$ et $r_2=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})\omega_0$

Les CI donnent $A_1+A_2=0$ et $r_1 A_1+r_2 A_2=\omega_0 U$ donc $A_1=\frac{\omega_0 U}{r_1-r_2}=-A_2$ avec $r_1-r_2=\sqrt{5}\omega_0$ donc $u=\frac{U}{\sqrt{5}}\left(\exp(\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})\omega_0 t)-\exp(\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})\omega_0 t)\right)$ et

$\frac{du}{dt}=\frac{\omega_0 U}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})\omega_0 t)+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})\omega_0 t)\right)$ soit

$\frac{du}{dt}=\frac{\omega_0 U}{2\sqrt{5}}\exp(-\frac{3}{2}\omega_0 t)\left((-3+\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}\sqrt{5}\omega_0 t)+(3+\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}(-\sqrt{5})\omega_0 t)\right)$ qui s'annule quand

$(3-\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}\sqrt{5}\omega_0 t)=(3+\sqrt{5})\exp(\frac{1}{2}(-\sqrt{5})\omega_0 t)\Leftrightarrow\exp(\sqrt{5}\omega_0 t)=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ soit à la date

$t=\frac{1}{\omega_0\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$.

5. Courbe de réponse pseudopériodique

a) Avec la définition du facteur de qualité $2\lambda=\frac{\omega_0}{Q}$, on obtient :

$\omega^2=\omega_0^2-\frac{\omega_0^2}{4Q^2}=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)$ et avec la relation période-pulsation :

$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)$ donc $T=T_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

b) $\varepsilon=\frac{T_0-T}{T}=\frac{T_0}{T}-1=\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}-1$ et avec l'approximation : $\varepsilon=1-\frac{1}{8Q^2}-1=-\frac{1}{8Q^2}$.

On souhaite donc $\frac{1}{8Q^2}\leq 0{,}01$ soit $Q\geq 3{,}54$, ce qui n'est pas une valeur considérable (seulement 3 ou 4 oscillations visibles).

c) On doit résoudre l'équation (même valeur à ces dates) : $u_C(t)=f_+(t)$ ce qui donne $\cos\psi=+1\Leftrightarrow\psi(t)\equiv 0[2\pi]$

d) Pour obtenir les maxima, on dérive $u_C(t)$:

$\frac{du_C}{dt}=-\lambda e^{-\lambda t}U_{Cm}\cos(\omega t+\varphi)-e^{-\lambda t}U_{Cm}\omega\sin(\omega t+\varphi)$ qui s'annule quand

$\lambda\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)=0\Leftrightarrow\tan\psi=-\frac{\lambda}{\omega}$.

Un maximum correspond à $\cos(\omega t+\varphi)=\cos\psi>0$ (un cos négatif conduit à $u_C<0$), donc les dates des extrema (min ou max) sont solutions de $\psi\equiv-\mathrm{Arctan}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)[\pi]$, mais celles des maxima vérifient $\psi\equiv-\mathrm{Arctan}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)[2\pi]$.

6. Influence d'un condensateur sur un circuit (R,L)

(a) Il faut chercher le régime permanent antérieur à la fermeture de l'interrupteur : la bobine est équivalente à un fil, mais il reste les 2 résistances. Une loi des mailles rapide donne $i(0_+)=\dfrac{E}{R+r}$ (puisque continue en 0 : courant dans une bobine).

$\dfrac{di}{dt}(0_+)$ est bien sûr lié à $u_L(0_+)$: $u_L(0_+)=L\dfrac{di}{dt}(0_+)+R\,i(0_+)$ qui n'est pas a priori continue, mais égale à $u_C(0_+)$ (dérivation) qui elle est continue, et donc nulle en 0, puisque le condensateur était initialement déchargé.

Donc $\dfrac{di}{dt}(0_+)=-\dfrac{R}{L}i(0_+)=-\dfrac{R}{L}\dfrac{E}{R+r}$

(b) En notant u la tension précédente, aux bornes de la dérivation, et avec directement la loi d'Ohm : $E=r\,i+u$ (maille)

dipôles : $u=L\dfrac{di_L}{dt}+R\,i_L$ et $i_C=C\dfrac{du}{dt}$; nœud : $i=i_L+i_C$

Il faut donc éliminer i_L en priorité car on peut pas l'extraire de la loi de la bobine : $u=L\dfrac{d}{dt}(i-i_C)+R(i-i_C)$ soit $E-r\,i=L\dfrac{d}{dt}(i-i_C)+R(i-i_C)$.

Pour éliminer $i_C=C\dfrac{du}{dt}$, on calcule $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{d}{dt}(E-r\,i)=-r\dfrac{di}{dt}$.

On remplace $E=r\,i+L\dfrac{di}{dt}+L\,r\,C\dfrac{d^2i}{dt^2}+Ri+R\,r\,C\dfrac{di}{dt}$: $L\,r\,C\dfrac{d^2i}{dt^2}+(L+R\,r\,C)\dfrac{di}{dt}+(R+r)i=E$

ou encore $\dfrac{d^2i}{dt^2}+\left(\dfrac{R}{L}+\dfrac{1}{r\,C}\right)\dfrac{di}{dt}+\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\dfrac{1}{LC}i=\dfrac{E}{r\,L\,C}$

(c) On donne $L=43\text{ mH}\,;R=9{,}1\,\Omega\,;r=50\,\Omega$ et $E=5{,}0\text{ V}$. Quelle valeur doit-on prendre pour C pour obtenir un régime pseudopériodique ?

Le discriminant de l'équation caractéristique doit être négatif $(L+R\,r\,C)^2-4\,L\,r(R+r)C<0$ qui est une équation de degré 2 en C.

On a avec des valeurs numériques en uSI : $(0{,}043+455\,C)^2-508{,}26\,C<0$ soit $207025\,C^2-469{,}13\,C+0{,}001849<0$ polynôme qui sera négatif entre les racines (coefficient positif devant le carré).

$\Delta=218551{,}8$ donc $C_1=3{,}95\cdot10^{-6}\text{ F}$ et $C_2=2{,}23\cdot10^{-3}\text{ F}$: $3{,}95\,\mu\text{F}<C<2{,}23\text{ mF}$

(d) $C=10\,\mu\text{F}$: on est bien en régime pseudopériodique.

On trouve la solution générale (cf cours) $i(t)=\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]+\dfrac{E}{R+r}$,

la SP étant trouvée en rayant toutes les dérivées temporelles.

Or $i(0_+)=\dfrac{E}{R+r}$: $A=0$ et donc $i(t)=B\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega t)+\dfrac{E}{R+r}$

On dérive pour injecter la dérivée première :

$\dfrac{di}{dt}(t)=B\left[-\dfrac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega t)+\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\omega\cos(\omega t)\right]$ soit $B=-\dfrac{R}{L\omega}\dfrac{E}{R+r}$