TD 8 – CORRECTION

1. Exploitation d'une courbe de résonance

- Lecture graphique de la valeur maximale et de la largeur du pic (bande passante) : on lit $I_{\max}=500\,\text{mA}$, donc $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}=500\,\text{mA}=353\,\text{mA}$.

  Les deux antécédents de cette valeur sont les pulsations de coupure $\omega_{C1}=16{,}5\,\text{krad/s}$ et $\omega_{C2}=24{,}5\,\text{krad/s}$, soit une bande passante en pulsation $\text{BP}_\omega=\omega_{C2}-\omega_{C1}=8{,}0\,\text{krad/s}$.

  D'après le cours, cette bande passante vaut R/L pour le circuit R,L,C série.
- Lorsqu'on se place exactement à la résonance, u_C et u_L se compensent : il ne reste que $u_R=E=R\,i$.

  Donc $R=E/I_{\max}=20\,\Omega$.
- On en déduit $L=\frac{R}{\text{BP}_\omega}=2{,}5\,\text{mH}$.
- L'intensité résonne à $\omega_0=20\,\text{krad/s}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, donc $C=\frac{1}{L\omega_0^2}=1{,}0\,\mu\text{F}$.
- De plus, $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{\omega_0}{\text{BP}_\omega}=2{,}5$.

2. Résonance en tension dans un circuit e,RLC série

a) On n'oublie pas le diviseur de tension !! $\underline{U}_C=\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{\text{éq}}}E$ (sinon, obtenir $\underline{I}$, puis appliquer la loi d'Ohm sur C), soit $\underline{U}_C=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R+j\omega L}E=\frac{1}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}E$.

b) Amplitude qui présente un maximum pour une certaine valeur de ω par définition de la résonance.

L'amplitude est le module de l'amplitude complexe : $U_C=|\underline{U}_C|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R^2 C^2}}E$

Elle sera maximale si le dénominateur est minimal, donc si $(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R^2 C^2=(\omega^2 LC-1)^2+\omega^2 R^2 C^2$ est minimal : c'est $P(X)$, en posant $X=\omega^2$

c) On cherche un min : la dérivée de la fonction polynomiale doit alors s'y annuler $P'(X)=2LC(LC\,X-1)+R^2C^2=0$ soit $X_r=\frac{1}{LC}\left(1-\frac{R^2 C}{2L}\right)=\omega_r^2$

On reconnaît la pulsation propre, et l'inverse du carré de Q : $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$, inférieure à ω_0 (mais très proche dès que Q dépasse quelques unités).

d) On a $RC=\frac{R}{L}LC=\frac{\mathrm{BP}_{\omega}}{\omega_0^2}=\frac{1}{Q\omega_0}$ donc $U_C=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}E$ soit

$U_{Cmax}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}}E=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{4Q^4}}}E$ donc en factorisant $1/Q^2$ dans la racine qui devient $1/Q$ au dénominateur, donc Q au numérateur : $U_{Cmax}=\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}E$.

Si Q est grand devant 1, on trouve $U_{Cmax}\approx QE$: la tension aux bornes du condensateur peut dépasser de beaucoup celle du générateur.