1. L'amplitude complexe est définie comme l'amplitude du signal fois exp j la phase à l'origine des dates, et ici il n'y en a pas : $e^{j\,0}=1$, donc c'est le réel E.

2. On a $B=\omega_{c2}-\omega_{c1}$, écart entre les pulsations de coupure définies comme les solutions de l'équation $I_m(\omega)=\frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.

3. La loi des mailles (circuit à produire sur la copie, orienté complètement) donne $e=u_R+u_L+u_C$, donc en passant en amplitudes complexes $E=\underline{Z_{éq}}\,\underline{I}$ avec $\underline{Z_{éq}}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}$, qui donne l'intensité dans le circuit.

   Une nouvelle application de la loi d'Ohm généralisée donne $\underline{U_C}=\underline{Z_C}\,\underline{I}$ et finalement

   $$\underline{U_C}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}E \text{ soit } \underline{U_C}=\frac{1}{j\omega RC-\omega^2 LC+1}E\,.$$

   (On peut obtenir le résultat directement avec un diviseur de tension, ce qu'on fera dans le cadre des filtres où i nous intéressera pas).

   On a $LC=\frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC=\frac{R}{L}LC=\frac{B}{\omega_0^2}$; de plus, $Q=\frac{\omega_0}{B}$ par définition donc $RC=\frac{1}{Q\omega_0}$.

   Finalement $\underline{U_C}=\frac{1}{\frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+1}E$.

   Il faut penser à passer le dénominateur et développer :
   $\frac{1}{Q\omega_0}(j\omega)\underline{U_C}+\frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2\underline{U_C}+\underline{U_C}=E$. On revient ensuite dans les réels
   $\frac{1}{Q\omega_0}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=e=e(t)$ qui donne bien l'ED demandée en multipliant tout par ω_0^2.

4. De façon évidente $\underline{U_L}=\frac{j\omega L}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}E$ donc $\underline{U_L}=\frac{-\omega^2 LC}{j\omega RC-\omega^2 LC+1}E$: on obtient avec la même méthode l'ED sur la tension aux bornes de la bobine :
   $\frac{d^2u_L}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_L}{dt}+\omega_0^2 u_L=\frac{d^2e}{dt^2}$ donc la même ED homogène, mais avec un second membre différent.

5. On a $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=20\,\text{krad/s}$ avec $\omega_0=2\pi f_0$ donc $f_0=3{,}18\,\text{kHz}$. $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc, puisqu'ici $Q=1$: $R=\sqrt{\frac{L}{C}}=1\,\text{k}\Omega$

6. $U_C = |\underline{U_C}| = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} E$. En posant $X = (\omega/\omega_0)^2$, cette amplitude est maximale si $P(X) = X^2 + (1-X)^2 = 2X^2 - 2X + 1$ est minimal donc pour $P'(X) = 4X - 2 = 0$: la solution est alors $X = 1/2$, et l'abscisse du maximum est donc $\omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Ce n'est pas demandé mais on peut remplacer dans U_C :

$U_{C,\max} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2}} E = \dfrac{1}{\sqrt{3/4}} E$ donc $U_{C,\max} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} E = 1{,}15 E$, qui dépasse un peu celle de la tension du générateur.