TD 12 – MÉCANIQUE EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

1. Dépassement d'un poids lourd

Une voiture A de longueur $d = 4\,\text{m}$ suit un camion de longueur $D = 10\,\text{m}$ à la vitesse constante $v_0 = 72\,\text{km/h}$ sur une route droite. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L = 35\,\text{m}$. À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a = 3{,}0\,\text{m/s}^2$.

On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

(a) Établir l'équation horaire $x_{av}(t)$ de l'avant de la voiture, et celle de l'avant du camion $X_{av}(t)$.

(b) Si l'on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est $L' = 20\,\text{m}$ devant l'avant du camion, calculer la durée Δt du dépassement et la distance L'' parcourue par le camion pendant celui-ci.

2. Choc

Deux voitures, supposées ponctuelles, se suivent sur une ligne droite à la vitesse $v = 30\,\text{m/s}$ à une distance $d = 80\,\text{m}$ l'une de l'autre.

À la date $t = 0$, la première *freine* avec une *décélération* constante $a_A = 2{,}0\,\text{m/s}^2$. Celle qui la suit commence à freiner seulement $\tau = 2{,}0\,\text{s}$ plus tard, avec une décélération constante $a_B = 1{,}0\,\text{m/s}^2$.

(a) En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date nulle, établir littéralement les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$ du mouvement des deux véhicules.

On raisonnera sur différents domaines de temps.

(b) Déterminer la date et la position du contact.

3. Accéléromètre balistique

Il est possible d'obtenir une mesure locale de g, accélération de tous les points matériels en chute libre, grâce au dispositif suivant : dans une enceinte où le vide a été réalisé, un système de projection envoie vers le haut, sur une trajectoire *rectiligne* et avec une vitesse initiale très mal connue, des particules assimilables à des points matériels.

Deux capteurs situés sur le côté mesurent les dates du passage de la particule :

- pour le plus bas, au plan d'altitude conventionnellement posée à 0, aux dates t_0 et t_3 ; on posera par convention l'origine des dates $t_0 = 0$ et on appellera v_0 la vitesse de la particule à cette date.
- pour celui situé le plus haut, les passages au plan d'altitude H, aux dates t_1 et t_2 : la vitesse initiale est suffisante pour que ce plan soit atteint et dépassé.

On a bien sûr $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Faire un schéma.

Justifier que $z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t$ puis obtenir la valeur de g en fonction de H, $\Delta t_{\text{inf}} = t_3 - t_0$ et $\Delta t_{\text{sup}} = t_2 - t_1$ après avoir déterminé chaque date.

4. Chute verticale 1D freinée par des frottements turbulents

Soit un mobile de masse m et de vitesse initiale verticale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ où l'on définit l'axe z vers le bas.

En plus du poids, il est soumis à une force de frottements proportionnelle au carré de la vitesse : $\vec{f} = -k\, v^2 \vec{u}_z$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse, en introduisant $\alpha = \frac{m}{k}$.

b) Quelle est la vitesse limite du corps v_P , en fonction de g et de α ? Obtenir la dimension de α par analyse dimensionnelle.

c) Justifier qu'on obtient alors l'équadiff $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\alpha}(v^2 - v_P^2) = 0$.

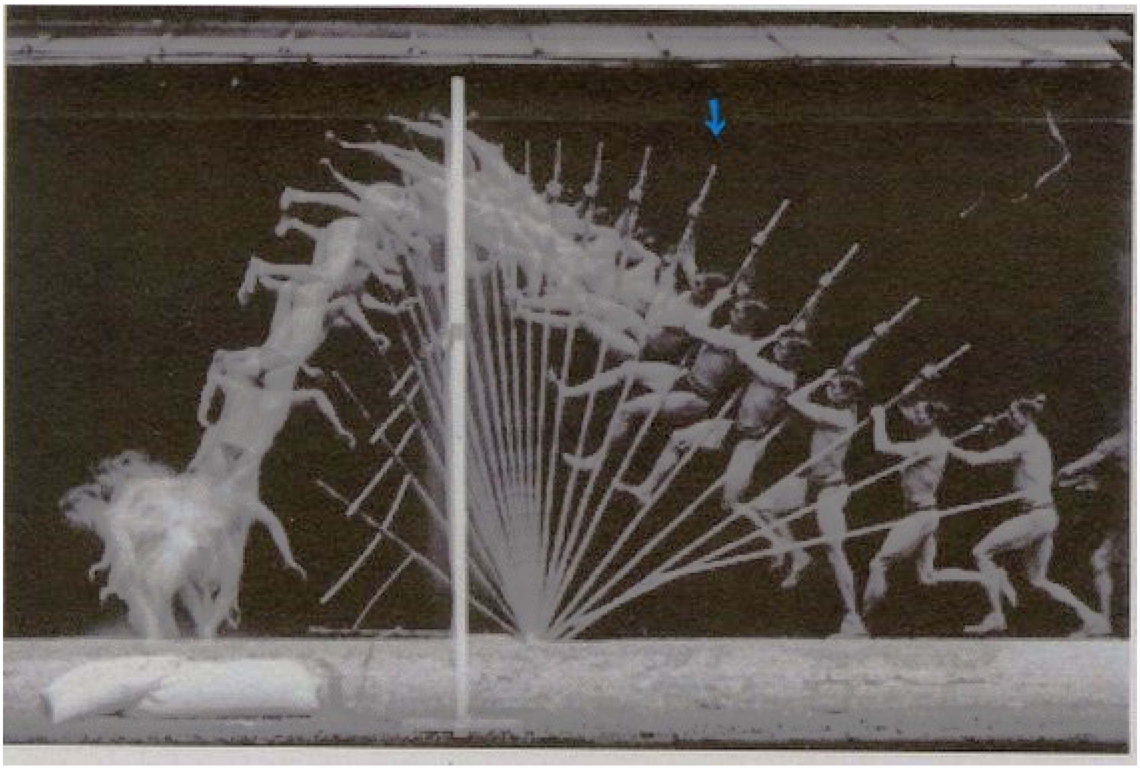
d) Séparer les variables temps t et vitesse v : les termes avec v à gauche du signe =, les termes en temps à droite.
Poser l'intégration avec les bornes correspondant à la situation et à la variable d'intégration : situation initiale en bas, finale à t quelconque en haut.

e) Décomposer $\frac{1}{v^2 - v_P^2}$ en somme de fractions facilement intégrables : exprimer b en fonction de v_P pour avoir $\frac{1}{v^2 - v_P^2} = b\left(\frac{1}{v - v_P} - \frac{1}{v + v_P}\right)$

f) En déduire que $v(t) = v_P \frac{(v_0 + v_P) + f(t)(v_0 - v_P)}{(v_0 + v_P) - f(t)(v_0 - v_P)}$ en donnant l'expression de $f(t)$ en fonction de t, α et v_P .

g) Vérifier la cohérence : que vaut $f(0)$ donc $v(0)$? que vaut $\lim_{+\infty} f$ donc v_∞ ?

5. Chronophotographie de Georges Demenÿ



Construire une approximation du vecteur vitesse au point considéré, ainsi qu'au deux points situés à côté de lui – on prendra une échelle arbitraire de temps et de longueur, car seule importe les normes relatives et les orientations des vecteurs. *On pourra reporter les positions intéressantes sur un calque.*

Construire le vecteur accélération au point indiqué, à l'aide des deux vitesses autour, la symétrie améliorant la précision.

6. Skieur sur un tire-fesse

Un skieur de masse m remonte à vitesse constante une piste inclinée d'un angle α avec l'horizontale. La perche fait un angle β avec la piste. (On a bien sûr $\alpha+\beta<\pi/2$).

On modélise l'ensemble des frottements par des frottements solides de coefficient dynamique f.

Déterminer la norme de la force exercée par la perche sur le skieur.

7. Peintre ingénieux

Un peintre en bâtiment, de masse $M=90\text{ kg}$, est assis sur une chaise le long du mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite, sans masse et sans frottements, dont la propriété est de transmettre la tension de la corde d'une extrémité de la corde à l'autre, en changeant éventuellement sa direction, mais pas sa norme. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force $F=680\text{ N}$. La masse de la chaise est $m=15\text{ kg}$.

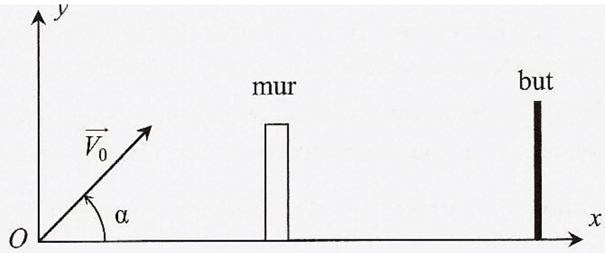
Tous les mouvements sont supposés verticaux.

(a) Déterminer l'accélération du peintre et de la chaise. Commenter son signe.

(b) Quelle force le peintre exerce-t-il sur la chaise ? Commenter.

8. Coup franc

On étudie, dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe $Oxyz$, un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430$ g, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ de norme $20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a) Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

b) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

c) Le tir est-il cadré ?

2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F}=-h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5\cdot10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

a) Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau=\dfrac{m}{h}$.

b) Donner l'équation de la trajectoire.

c) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

d) Le tir est-il cadré ?