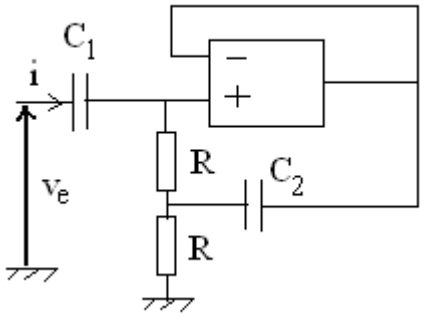
À lire avec soin avant de commencer :
Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. On demande d'encadrer les résultats littéraux et de souligner les résultats numériques en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.
De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.
Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision.
La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.

I – Circuit d'ordre 2 avec ALI – 3 pts

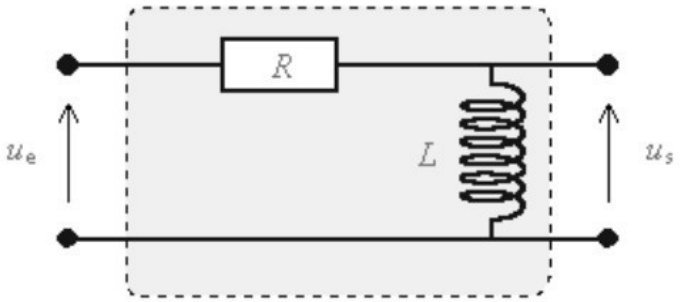
L'ALI utilisé ici est supposé idéal.



1. Définir précisément cette notion.
2. Le fonctionnement linéaire de l'ALI est-il certain au vu du montage ? On l'admettra pour la suite si ce n'est pas le cas.
3. Montrer qu'on peut écrire, en régime sinusoïdal forcé : $\underline{v_e}=\left[A+j\left(B\omega-\frac{1}{D\omega}\right)\right]\underline{i}$, où l'on donnera les expressions des constantes *A,B,D* en fonction des caractéristiques des dipôles.
4. En revenant dans les réels, montrer que ce circuit se comporte comme un circuit e,rLC série dont on donnera les caractéristiques : identifier les dipôles équivalents r, L et C en fonction des caractéristiques des dipôles dans le circuit donné, déterminer sa pulsation de résonance et son facteur de qualité.

II – Filtre construit avec une bobine – 9 pts

On considère le filtre suivant, toujours utilisé en sortie ouverte :



Il s'agit du montage utilisé dans les parties A et B, mais pas nécessairement dans la partie C.

Les 3 parties A,B et C sont complètement indépendantes.

A/ Cas d'une bobine idéale

1. Que signifie l'expression « en sortie ouverte » ?

2. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}$ de ce filtre, en introduisant la constante $\omega_0=\frac{R}{L}$.

(L'expression finale de $\underline{H}$ ne doit plus contenir ni *R* ni *L*, mais seulement j, ω et ω_0)

3. Tracer son diagramme de Bode asymptotique, pour la phase et pour le gain.

4. Tracer l'allure des courbes exactes grâce à un point supplémentaire.

5. Définir et donner la bande passante à -3 dB de ce filtre.

B/ Cas d'une bobine réelle

La bobine est maintenant supposée réelle : on note sa résistance interne *r*.

1. Déterminer la nouvelle fonction de transfert H du filtre en fonction de r, R, L et ω .

2. Montrer qu'on peut mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$\underline{H}=\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Identifier les valeurs de ω_1 et de ω_2 en fonction de *r*, *R* et *L* , et justifier que $\omega_1<\omega_2$.

3. Identification à des formes connues

a) Montrer qu'on peut écrire $\underline{H}$ sous la forme $\underline{H}=K\dfrac{\underline{H}_a}{\underline{H}_b}$, où $K=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ et où $\underline{H}_a$ et $\underline{H}_b$ sont les fonctions de transfert de deux filtres passe-bas d'ordre 1 ;

pour cela, donner les expressions de $\underline{H}_a$ et $\underline{H}_b$ en fonction de ω, ω_1 et ω_2 et justifier leur nature par une étude rapide des fonctions de transfert $\underline{H}_a$ et $\underline{H}_b$.

On note φ_a et φ_b les déphasages respectivement associés à ces fonctions de transfert, et $G_{a,\text{dB}}$ et $G_{b,\text{dB}}$ les gains respectifs en décibels ; on note de même φ et G_{dB} le déphasage et le gain en décibels associés à la fonction de transfert $\underline{H}$.

b) Déterminer les relations entre G_{dB} , K_{dB} , $G_{a,\text{dB}}$ et $G_{b,\text{dB}}$, puis entre φ , φ_a et φ_b .

On suppose maintenant que $\omega_2=10\,\omega_1$ *(dans cette partie B seulement)*

4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre étudié pour le gain et la phase, en prenant comme abscisse $\log\dfrac{\omega}{\omega_1}$.

On fera une construction purement graphique, expliquée sur la copie, à partir des courbes associées à $\underline{H}_a$ et $\underline{H}_b$, **en utilisant une couleur spécifique pour chacun des filtres de base, et une autre pour le résultat** *(attention : cette consigne doit impérativement être respectée).*

5. Courbe exacte de la phase

a) Démontrer qu'elle présente un maximum pour la pulsation $\omega_M=\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Aide mathématique : $\text{Arctan}'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

b) Justifier que sur le diagramme de Bode, ω_M se trouve précisément au milieu de ω_1 et ω_2 . Obtenir la valeur numérique du coefficient *k* dans l'écriture suivante : $\omega_M=k\,\omega_1$.

c) Sans calcul supplémentaire, tracer l'allure de la courbe exacte de la phase, sachant qu'elle admet une symétrie (miroir) autour de ω_M , et que son maximum est strictement inférieur à $\pi/2$.

d) Tracer l'allure de la courbe exacte du gain, sachant qu'elle présente une symétrie centrale autour de ω_M .

C/ Relevé expérimental

En travaux pratiques, on relève rapidement les caractéristiques d'un filtre constitué de deux dipôles : une bobine réelle et une résistance $R=115\,\Omega$.

Pour cela, on envoie au filtre un signal d'entrée $e(t)$, tension sinusoïdale sans offset de fréquence f.

GdB est le gain en décibels du filtre et φ est le déphasage du signal de sortie $s(t)$ par rapport à l'entrée, introduit par le filtre.

f(Hz)	1	3	10	30	100	300	1000	3000	10000	30000
GdB	-1,39	-1,39	-1,40	-1,44	-1,85	-4,40	-12,22	-21,44	-31,85	-41,39
φ (°)	-0,19	-0,57	-1,91	-5,71	-18,43	-45,00	-73,30	-84,29	-88,28	-89,43

Toutes les réponses devront être rédigées : aucune affirmation sans démarche scientifique ne sera tolérée.

1. D'après le tableau, quelle est la nature du filtre ?
2. D'après le tableau, quel est son ordre ?
3. Quelle est sa fréquence centrale ?
4. Quelle est sa fréquence de coupure ?
5. En justifiant avec l'étude des circuits simplifiés, schématiser sur la copie le montage électrique à réaliser avec :
   - le générateur de tension GBF,
   - les deux dipôles introduits dans l'énoncé,
   - les deux voies de l'oscilloscope : Y_1 visualisant l'entrée, et Y_2 la tension de sortie.
6. Par toute démarche qui vous semble correcte, mais complètement explicitée, obtenir les deux caractéristiques électriques de la bobine utilisée.

III – Filtrage d'un signal et mesure d'un déphasage (d'après Centrale PC) – 9 pts

On étudie les signaux issus de deux capteurs de débit. Ces signaux sont sinusoïdaux, de fréquence f = 80 Hz, déphasés d'un angle φ proportionnel au débit massique que l'on cherche à mesurer. La partie A correspond à l'étude du filtrage des signaux provenant des capteurs. Deux méthodes de mesure du déphasage entre les deux signaux sont ensuite successivement étudiées dans les parties B et C. Ces diverses parties sont largement indépendantes. On se place en régime sinusoïdal forcé pour les parties A et B. Tous les amplificateurs opérationnels utilisés sont idéaux et de gain infini.

Nota bene : Dans cette partie, les graphiques devront être tracés avec précision, donc avec une grande attention portée à la forme des courbes et à leurs points caractéristiques.

A - Filtrage

On constate expérimentalement que les signaux issus des capteurs sont brouillés par des signaux de fréquences différentes.

A.1) Quel type de filtrage peut-on envisager pour réduire l'amplitude de ces signaux parasites ?

On s'intéresse à un filtre dit de Sallen Key (figure 1) composé de 4 dipôles (1), (2), (3) et (4) d'admittances complexes respectives $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ et de deux résistors de résistances r et $(k-1)r$ où k est un réel positif tel que $1 < k < 5$. L'amplificateur opérationnel est en fonctionnement linéaire.

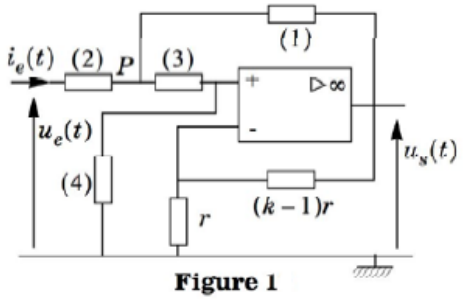


Figure 1

A.2) Grâce à un diviseur de tension, obtenir l'expression du potentiel V_- , à l'entrée inverseuse de l'ALI, en fonction de u_s et de k. On justifiera l'application du théorème avec une propriété générale des ALI.

A.3) On considère un dipôle *D* linéaire, association quelconque de dipôles R, L et C, d'impédance $\underline{Z}$, donc utilisé en régime sinusoïdal forcé. Le courant complexe qui le traverse est orienté de la borne notée A vers la borne notée B.

Justifier précisément qu'on a $\underline{i}=\underline{Y}(\underline{V}_A-\underline{V}_B)$, où $\underline{V}_A$ et $\underline{V}_B$ sont les potentiels aux points A et B du circuit, et où $\underline{Y}$ est l'admittance du dipôle *D*.

A.4) En utilisant les résultats précédents, montrer que la fonction de transfert s'écrit sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{k\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_4(\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3)+\underline{Y}_3(\underline{Y}_2+(1-k)\underline{Y}_1)}$$

Pour toute la suite, les composants (1) et (2) sont des résistors identiques de résistance *R*, (3) est un condensateur de capacité *C* et (4) est constitué d'un résistor de résistance *R* en parallèle avec un condensateur de capacité *C*.

A.5) Obtenir l'expression de $\underline{H}$ sous forme de fraction rationnelle, rapport de deux polynômes en ω, en fonction de *k*, *R* et C.

A.6) Déduire de l'expression de $\underline{H}$ la nature du filtre obtenu.

A.7) Déduire l'équation différentielle du filtre, reliant les fonctions réelles $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

A.8) En déduire les expressions de la pulsation centrale du filtre ω_0 , de son facteur de qualité *Q*, et de son gain maximal G_0 .

Comment doit-on choisir *k* pour que le facteur de qualité soit strictement positif ? On supposera cette hypothèse réalisée ensuite.

A.9) La figure 2 ci-dessous correspond au diagramme de Bode pour une valeur de *Q* donnée, avec le filtre accordé sur la fréquence des signaux à analyser, issus des capteurs de débit.

En exploitant graphiquement ce diagramme, donner l'expression du signal de sortie pour chacun des trois signaux suivants:

$u_{e1}(t)=E\cos(100\pi t)$, $u_{e2}(t)=E\cos(160\pi t)$ et $u_{e3}(t)=E\cos(200\pi t)$ où *t* est en secondes. Commenter les résultats obtenus.

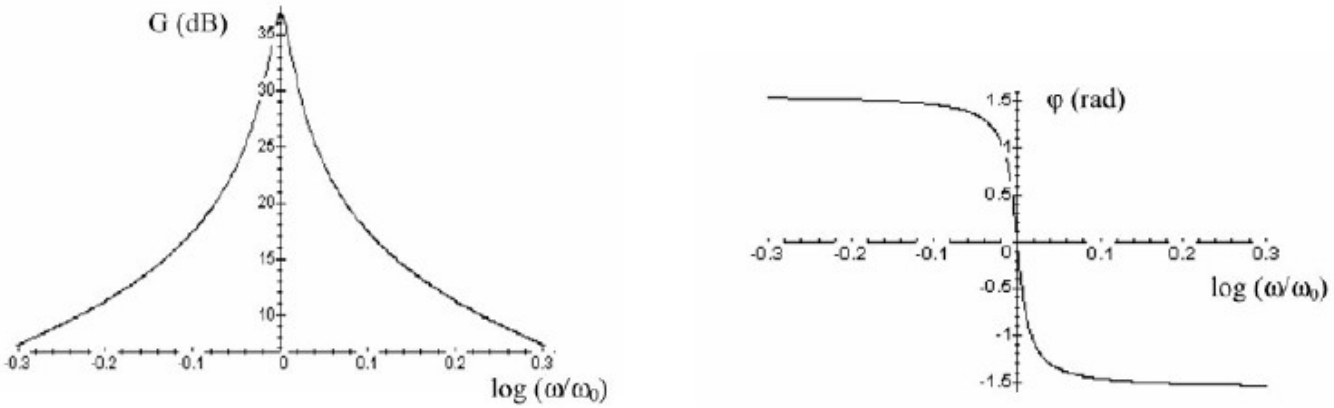


Figure 2

B - Mesure du déphasage à l'oscilloscope

On utilise un oscilloscope pour visualiser les signaux $u(t)$ et $u'(t)$.

On obtient l'oscillogramme ci-contre (figure 3).

Lequel des deux signaux est en avance de phase sur l'autre ?

Déduire de l'oscillogramme le déphasage φ entre les deux signaux.

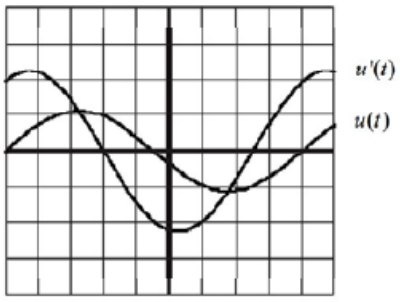


Figure 3

C - Phasemètre à bascule

Pour de nombreux débitmètres conçus dans les années 1980 le déphasage est en fait mesuré selon le principe développé dans cette partie.

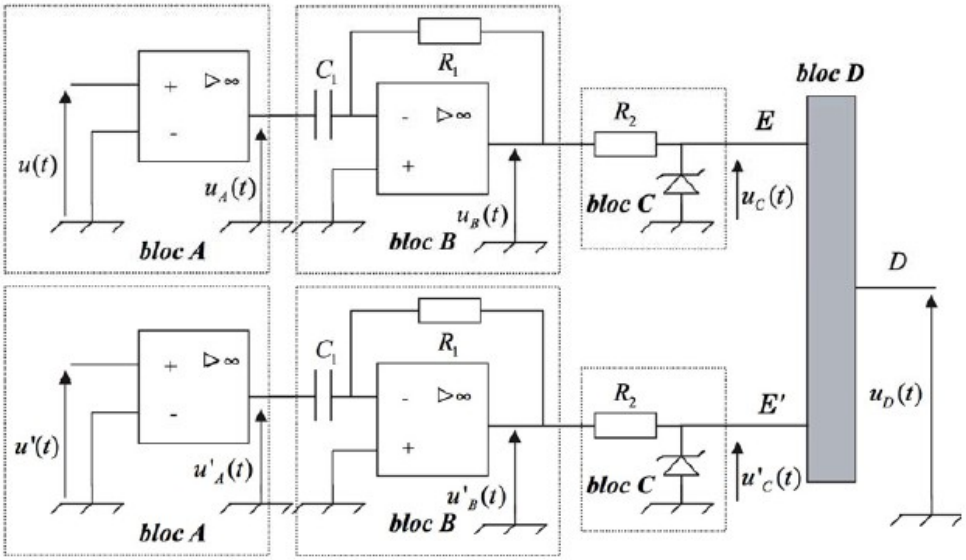


Figure 4

Le montage étudié, représenté figure 4, est décomposé en blocs notés « A »,« B »,« C » et «D ». Les blocs de type « C » font intervenir une diode Zener « idéale» à propos de laquelle aucune connaissance préalable n'est nécessaire. On considère que le régime permanent est atteint. Les amplificateurs opérationnels des blocs «A » fonctionnent en régime saturé et ceux des blocs «B »en régime linéaire.

Les signaux sinusoïdaux $u(t)$ et $u'(t)$ de période T sont transformés en signaux $u_B(t)$ et $u'_B(t)$ composés d'impulsions déphasées. Les blocs « C » et « D » permettent de construire à partir de ces impulsions un signal dont on peut tirer le déphasage entre $u(t)$ et $u'(t)$. Les courants entrant par les entrées E et E' du bloc « D » sont négligeables.

Les «impulsions» seront considérées ici comme des signaux rectangulaires de largeur temporelle Δt très faible devant T et de hauteur algébrique V (voir figure 5).

Toutes les impulsions intervenant dans ce problème sont telles que $|V| \geq 5$ V.

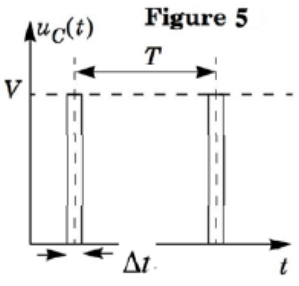


Figure 5

C.1) Étude des blocs « A »

a) Représenter la caractéristique de transfert statique $u_s(\varepsilon)$ d'un amplificateur opérationnel idéal de gain infini (cf. figure 6).

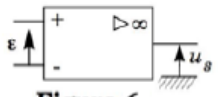


Figure 6

b) Justifier que le montage de la figure 7 s'appelle « comparateur à zéro ».

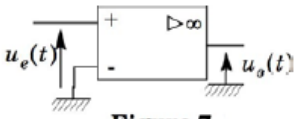


Figure 7

On note Δt la durée du basculement de la sortie de l'amplificateur opérationnel d'un état de saturation à l'autre.
C'est une durée très faible (retard à la bascule), pendant laquelle la tension de sortie évolue linéairement et très rapidement, entre l'un et l'autre des états de saturation.

c) On considère le bloc «A » en entrée duquel on injecte le signal sinusoïdal $u = U \cos(2\pi f.t)$.
Tracer sur deux périodes la courbe représentative du signal $u_A(t)$. On indiquera soigneusement sur l'axe des temps les dates t_1, t_2, ... t_8 entre lesquelles la sortie de l'amplificateur opérationnel se trouve dans un état de saturation haut ou bas. On fera également figurer sur ce graphe la période T et la durée Δt, très exagérée.

C.2) Étude des blocs «B »

On supposera que les valeurs des composants sont choisies de telle sorte que les amplificateurs opérationnels de ces blocs soient toujours en régime linéaire.
a) Établir l'équation différentielle qui relie $u_B(t)$ à $u_A(t)$.
b) Tracer sur deux périodes l'allure de la courbe représentative du signal $u_B(t)$, sans se sourcier de ses valeur maximale et minimale. On reportera soigneusement sur l'axe des temps les dates t_1, t_2, ... t_8 définies en C.1-c) et on fera figurer la période T et la durée Δt.

FIN