TD 13 – Oscillateurs

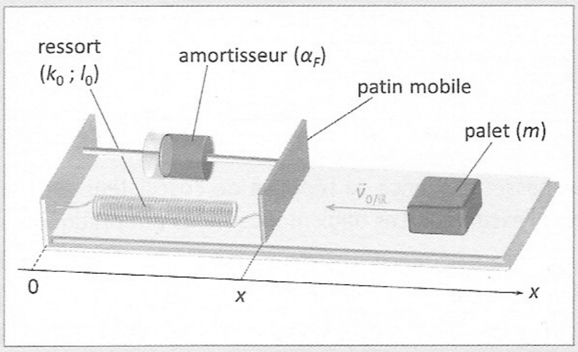
1. Modèle atomique (faux !) de Thomson

Pour décrire l'interaction entre une onde lumineuse, caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$, et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié due à J. J. Thomson : l'électron est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel élastique isotrope $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$, et il est freiné par une force de frottement visqueux linéaire (coefficient h). On précise que la force subie par une charge q placée dans un champ électrique $\vec{E}$ est $\vec{F_e} = q\vec{E}$ (voir chapitre 15). Le poids est négligeable.

1. Établir les équations du mouvement d'un électron quand il est excité par $\vec{E}(t)$. On notera $-e$ et m la charge et la masse de l'électron et on posera : $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
2. Démontrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à $\overrightarrow{e_x}$.
3. Déterminer, en régime permanent, l'amplitude de $x(t)$ et celle de l'accélération $a_x(t)$.
4. Cet atome est éclairé par de la lumière blanche, composée de champs ayant toutes les pulsations ω comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet), avec $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Sachant que ω_2 et α sont tous les deux très inférieurs à ω_0, montrer que dans ces conditions l'amplitude de $a_x(t)$ est proportionnelle à ω^2.
5. Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse proportionnelle au carré de son accélération, expliquer alors la couleur du ciel...

2. Mouvement d'un palet

On étudie le rebond d'un palet de masse m sur un dispositif constitué d'un ressort et d'un amortisseur fixés à un patin mobile dont la masse est négligée devant celle du palet. On note k_0 la raideur du ressort, l_0 sa longueur au repos et α_F le coefficient de frottement fluide linéaire de l'amortisseur. Le palet glisse sans frottement sur la surface horizontale du sol, qui compense intégralement son poids. L'axe sur lequel se déroule le mouvement est noté Ox. Avant le rebond, le palet glisse sur le plan horizontal plan avec une norme de vitesse constante v_0 dirigée vers le patin : $\vec{v} = -v_0 \cdot \vec{u}_x$. L'instant où le palet atteint le patin mobile d'abscisse initiale l_0 est choisi comme origine des temps. On étudie le mouvement pendant la phase où le palet est en contact avec le patin.



1. Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme suivante, dans laquelle on identifiera les constantes en fonction de m, k_0, l_0 et α_F. Caractériser cette équation.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\left(x - x_{eq}\right) = 0$$

2. Les valeurs de m et k_0 sont fixes, la valeur de α_F peut être ajustée. Montrer que différents types de solutions sont possibles selon la valeur choisie pour le coefficient α_F.
3. Donner, en fonction de k_0 et m, l'expression de la valeur critique de α_F qui sépare les deux régimes du système. On donne à α_F sa valeur critique. Déterminer la solution $x(t)$ conforme aux conditions initiales.
4. Déterminer l'instant t_{MIN} pour lequel le ressort présente une longueur minimale x_{MIN} au cours de l'évolution du système, puis exprimer cette longueur. Tracer l'allure de $x(t)$.
5. Étudier la composante de vitesse $v(t)$ lors du rebond, en supposant que le palet reste lié au patin.
6. On prend en compte le fait que le palet n'est pas lié au patin. À quel instant t_{MAX} le palet se détache-t-il du patin ? Quel est alors sa vitesse ?
7. Faire le bilan énergétique du rebond. Définir et calculer le coefficient de restitution du choc.

3. Astronaute en mission

Dans l'espace en chute libre, le champ de pesanteur apparent est quasi nul et variable, et il est impossible de contrôler le « poids » des astronautes à l'aide d'une balance.

On utilise un fauteuil de masse $m = 35\,\mathrm{kg}$ reposant sur un ressort vertical linéaire.

En l'absence de l'astronaute, le fauteuil oscille avec une période $T_0 = 1{,}50\,\mathrm{s}$.

Lorsque l'astronaute est assis dedans, le système oscille à la période $T_1 = 2{,}75\,\mathrm{s}$: quelle est la masse M de l'astronaute ?

4. Deux ressorts

On considère deux ressorts linéaires identiques $(k\,;L_o)$ accrochés respectivement aux points du plan $A(0,a)$ et $B(0,-a)$ où a est une distance constante donnée.

Un point matériel M (perle par exemple) de masse m a un mouvement contraint sur une tige métallique confondue avec l'axe (Ox). Il est accroché aux extrémités libres de chacun des deux ressorts.

Le plan (xOy) est horizontal. Tout frottement est négligé.

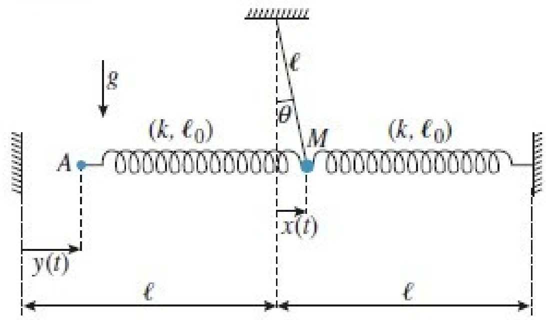
a) Faire un schéma de la situation pour une position $x > 0$ quelconque de M.

b) Obtenir l'ED vérifiée par la fonction $x(t)$ sans chercher à la résoudre.

c) Déterminer la ou les positions d'équilibre de M. On distinguera des cas selon que $a < L_o$ ou non.

5. Réponse harmonique stabilisée

Le pendule simple de masse m représenté sur la figure (*doc.* 1) est lié par deux ressorts identiques de raideur k et longueur ℓ_0 à vide.
Au repos, l'abscisse x est nulle lorsque $y = 0$.
On fera l'approximation des petits angles pour étudier le mouvement.



1 • Quelle est la pulsation propre ω_0 du système ?

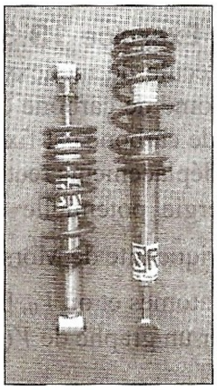
2 • Le point A est mobile, animé d'un mouvement sinusoïdal, se déplaçant de $y(t) = Y_m \cos \omega t$ par rapport à sa position fixe précédente. On note $\Omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

En supposant qu'un régime permanent est établi, déterminer l'amplitude X_m du mouvement de M, et le déphasage φ de son déplacement $x(t)$ par rapport au déplacement $y(t)$ du point A. Tracer les variations de X_m et φ en fonction de ω.

3 • Discuter la modification des résultats lorsqu'on tient compte d'un amortissement du pendule, couplé avec une palette plongeant dans un liquide, à l'origine d'une force de frottement $\vec{F} = -h\,\dot{x}\,\vec{e}_x$.

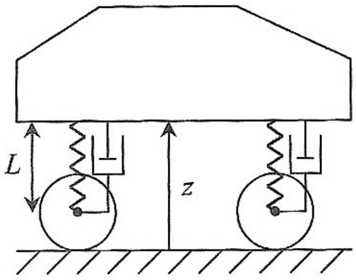
4 • On souhaite que le déplacement X_m varie (à Y_m donné) au plus de 10 % sur une plage de fréquence aussi large que possible. Quelle valeur faut-il donner au facteur de qualité de l'oscillateur pour réaliser cette condition ?

6. Suspension de voiture



La suspension d'un véhicule automobile est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort hélicoïdal linéaire de raideur k et de longueur à vide L_0 ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston, parallèle au ressort, exerçant une force de frottement visqueux linéaire de coefficient d'amortissement λ proportionnelle à la vitesse verticale du châssis *par rapport au centre de la roue*.



La masse totale de la voiture chargée est répartie sur les quatre systèmes, mais comme *on se limite dans cette étude aux seuls mouvements verticaux* de la voiture, on peut considérer que le système est un point matériel M de masse notée m, fixé en haut du ressort, cette masse m étant en réalité le quart de celle de la voiture.

Les roues de rayon R sont considérées comme rigides (on n'en considère donc qu'une seule) ; la longueur du ressort dans état quelconque est notée L et on repère la position du système par son altitude z par rapport au sol.

On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

1. Préliminaire : relations générales

   Quelle est la relation toujours vérifiée (quel que soit le mouvement du système) entre z et L ?
   À quel vecteur unitaire correspond le vecteur unitaire intervenant dans la définition de la force de rappel élastique ?

2. Le véhicule étant immobile, obtenir la longueur L_{EQ} du ressort et l'altitude z_{EQ} correspondante (« garde au sol »).

3. Le châssis est abaissé d'une hauteur h par rapport à cette position d'équilibre, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

   a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ du système par rapport au sol.

   La passer sous forme canonique pour obtenir la pulsation propre ω_0 du système et le facteur de qualité Q en fonction des constantes données.

   b) L'amortisseur a été réglé de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre *le plus bref possible*, lorsque la masse totale est seulement celle de la voiture :
   $m=\frac{1}{4}\times 1\,100\,\text{kg}$.

   Calculer la valeur de λ en fonction de m et k.

   c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_{EQ}, h et ω_0.

4. La même expérience, dans les mêmes conditions initiales, est réalisée avec dans la voiture une famille corpulente : la masse du système devient alors
   $m'=m+\frac{1}{4}\times(150+90+80+80)\,\text{kg}$.

Déterminer alors le nouveau facteur de qualité et la solution complète $z(t)$. Cette situation est-elle plus ou moins confortable que la précédente ?

5. Le véhicule roule à vitesse v constante sur un sol *en moyenne* horizontal mais gondolé : l'altitude du sol en fonction de l'abscisse horizontale *x* s'exprime par $z_S(x)=Z_S\cos(K\,x)$ où $K=\dfrac{2\pi}{\Lambda}$ est la pulsation spatiale du motif dessiné par le sol et Λ la longueur d'onde de ce motif.

   a) Justifier brièvement qu'en négligeant la dimension de la roue par rapport à Λ, on peut écrire que le bas des roues se trouve, en fonction du temps, à l'altitude du sol $z_S(t)=Z_S\cos(\omega\,t)$, avec $\omega=K\,v$.

On note maintenant $z(t)$ l'altitude de la voiture *par rapport au niveau moyen du sol.*

   b) Démontrer que la coordonnée sur *z* de la force de frottement s'écrit maintenant $f_z=-\lambda(\mathring{z}-\mathring{z}_S)$. Adapter les autres lois trouvées précédemment à la nouvelle situation.

   c) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en fonction de z_S, de $\mathring{z}_S$ qu'on ne calculera pas, et des constantes (introduire z_{EQ}, altitude à l'équilibre lorsque $z_S=0$, ainsi que ω_0 et *Q*).

   d) On définit la variable $u(t)=z(t)-z_{EQ}$: on a alors $\mathring{u}=\mathring{z}$ et de même pour les dérivées secondes.

   On cherche pour la fonction *u*, une solution en régime établi, donc sinusoïdale de même pulsation que l'excitation, de la forme $u(t)=U\cos(\omega t+\varphi)$.

   Passer dans les complexes pour obtenir l'expression de la fonction de transfert définie par $\underline{H}=\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_S}$.

   e) Obtenir le diagramme de Bode pour le gain et caractériser le filtre obtenu.

   f) Sur les pistes du Sahel, les touristes roulent dans leur voiture de location à 40 km/h, voire moins, parce qu'ils ont peur, alors que les locaux roulent sans hésitation à une vitesse de 90 km/h. Expliquer.

7. Équation proies – prédateurs (de Volterra-Lotka)

On considère deux espèces animales en interaction entre elles, mais, pour simplifier, supposées isolées du reste du monde : les proies et les prédateurs.

On considère le modèle simplifié suivant :

- En l'absence de proies, la population des prédateurs (renards polaires par exemple) décroît exponentiellement.
- En l'absence de prédateurs, la population des proies (lièvres arctiques par exemple) se reproduit et croît exponentiellement – la constante de temps étant éventuellement différente de celle des prédateurs.
- La présence de prédateurs tend à faire décroître la population de proies, proportionnellement au produit des deux populations.
- La présence de proies tend à favoriser la multiplication des prédateurs, et aboutirait à leur croissance exponentielle, proportionnellement aux deux populations.

Le système d'équations adimensionné (on raisonne sans unité) est donc le suivant, où l'on note $x(t)$ la population de proies et $y(t)$ celle des prédateurs.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$$ où $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ sont 4 constantes positives.

a) Justifier le système obtenu avec les 4 énoncés de la description du modèle de Volterra-Lotka.

b) Un système de deux équations différentielles couplées d'ordre 1 sur deux fonctions x et y peut se découpler et se ramener à deux équations différentielles d'ordre 2 indépendantes sur chacune des fonctions.

   Obtenir l'équadiff (non linéaire) vérifiée par les proies seules.

c) On suppose qu'un régime permanent (point fixe : les deux populations sont constantes) existe, différent de $(0{,}0)$: obtenir l'expression des deux populations constantes en fonction de $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$.