TD 15 – ÉNERGIE

1. En vacances

Une voiture tracte un caravane de masse $m = 800\ kg$ sur une route rectiligne et horizontale.

L'ensemble se déplace à une vitesse $v = 72{,}0\ km.h^{-1}$. L'intensité de pesanteur vaut $g = 10\ N.kg^{-1}$

La force de frottement s'exerçant sur la caravane, supposée constante, a pour valeur $f = 200N$.

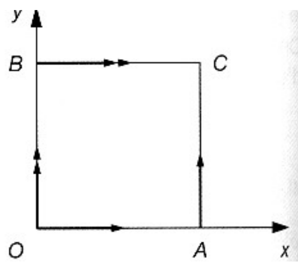
1- Calculer la valeur de la force de traction F exercée par la voiture sur la caravane.

2- Calculer la puissance P_1 développée par la force de traction.

La voiture et la caravane se déplacent maintenant sur une pente formant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. On gardera la même valeur pour la force de frottement f.

3- Quelle doit être la valeur de la nouvelle puissance P_2 afin que le conducteur garde La même vitesse v ?

2. Travail d'une force étrange



Les points O, $A(L\,;0)$, $B(0\,;L)$ et C sont les quatre sommets d'un carré.

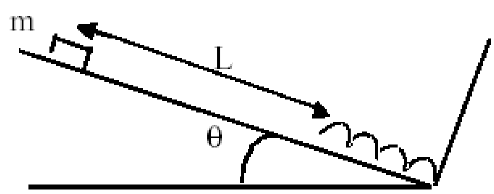
Il règne dans le plan un champ de force d'équation $\vec{f}=k(y\vec{u}_x-x\vec{u}_y)$, $(k\text{ cte})$, où x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M où s'applique $\vec{f}$.

a) Évaluer les travaux W_1, W_2 et W_3 de $\vec{f}$ le long des trajets respectifs $O\to A\to C$, $O\to B\to C$ et $O\to C$ direct (diagonale du carré).

On exprimera $d\vec{OM}$ et $\vec{f}$ sur chacun des segments en fonction des différentielles dx et dy des coordonnées cartésiennes, en simplifiant x et y quand elles ont des valeurs évidentes, puis on calculera à chaque fois l'intégrale correspondant au travail.

b) Conclure sur la force $\vec{f}$ et sur l'énergie potentielle associée à $\vec{f}$.

3. Rebond



On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse m à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort idéal de constante de raideur k en bas du plan incliné. Au point le plus bas atteint par m, le ressort est comprimé d'une longueur d avant qu'il ne se détende à nouveau.

1. Calculer k en fonction de g, m, θ, L (voir la figure) et d.
2. Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?

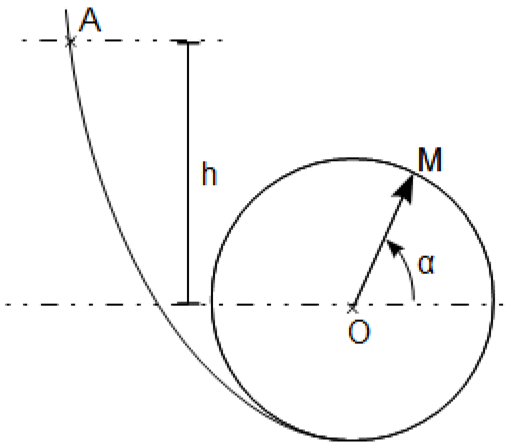
4. Carabine à ressort

Une carabine-jouet à ressort est modélisée de la manière suivante : un ressort de raideur k est placé dans un tube cylindrique (en plastique) de longueur ℓ_0 égale à la longueur à vide du ressort. On dépose au bout du ressort une balle en plastique de masse m et on comprime le ressort d'une longueur $\Delta\ell$ à l'intérieur du tube. Le tube étant incliné de 60° par rapport à l'horizontale, on libère le ressort qui propulse instantanément la balle. On néglige le frottement de la balle dans le tube et la résistance de l'air.

1 ▬ À quelle vitesse v_0 la balle sort-elle du canon de la carabine ?

2 ▬ Quelle hauteur h (par rapport à la sortie de la carabine) la balle atteint-elle dans ces conditions ?
Avec quelle vitesse horizontale v_H ?
A.N. : Calculer v_0, h et v_H.
Données : $m = 20$ g, $k = 400\ \mathrm{N.m^{-1}}$ et $\Delta\ell = 10$ cm.

5. Gouttière



Un point matériel M, de masse m, glisse sans frottement dans une gouttière, se terminant par une boucle circulaire de rayon R. Le point matériel est lâché, sans vitesse initiale, depuis un point A, situé à une altitude h au-dessus du centre O du cercle. On repère sa position sur le cercle par l'angle α défini sur la figure ci-dessous. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté $\vec{g}$ et on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude de O.

(a) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du mobile au cours de son mouvement ?

(b) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse de M sur le cercle en fonction de g, h, R et α.

(c) Exprimer la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la gouttière sur M lorsqu'il se trouve sur la portion circulaire, en fonction de g, h, R, m et α.

(d) En déduire la condition sur h et R seulement pour que M puisse faire un tour complet.

6. Descente sportive

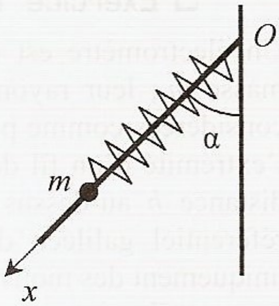
La piste de descente olympique La Face de Bellevarde, à Val d'Isère, est longue de 3000 m et présente un dénivelé de 900 m.
Un skieur de masse m = 75 kg descend la piste.

1. En prenant pour origine de l'énergie potentielle la position du skieur à l'arrivée, calculer l'énergie potentielle du skieur au sommet de la piste.
2. Quelle est la valeur de l'énergie mécanique du skieur au départ ?
3. En supposant les frottements négligeables, quelle serait la vitesse du skieur en bas de la piste ?
4. En réalité, la vitesse maximale enregistrée à l'arrivée est de 140 km·h^{-1}.
   Calculer :
   a. l'énergie cinétique du skieur à l'arrivée ;
   b. la variation de l'énergie cinétique du skieur entre le départ et l'arrivée ;
   a. le travail des forces de frottements.

7.

Ressort sur tige inclinée

Considérons une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige, avec l'origine O est prise à l'autre extrémité du ressort.



1. Énergie et équilibre

a) Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m. .

b) En déduire la position d'équilibre stable $x_{éq}$.

c) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $u = x - x_{éq}$.

2. Oscillations

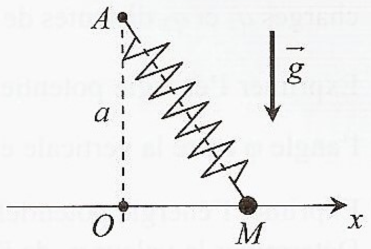
a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

b) En déduire la période des petites oscillations.

8.

Oscillation le long d'une tige

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (longueur à vide ℓ_0, raideur k) dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est $AO = a$.



1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$. En déduire que, dans le cas où $a > \ell_0$, la seule position d'équilibre est O et qu'elle est stable.

2. On étudie alors les oscillations autour de O. Écrire l'équation différentielle du mouvement par dérivation de l'énergie mécanique. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x (c'est-à-dire en négligeant les termes en x^2, x^3...), en déduire la période des petites oscillations.

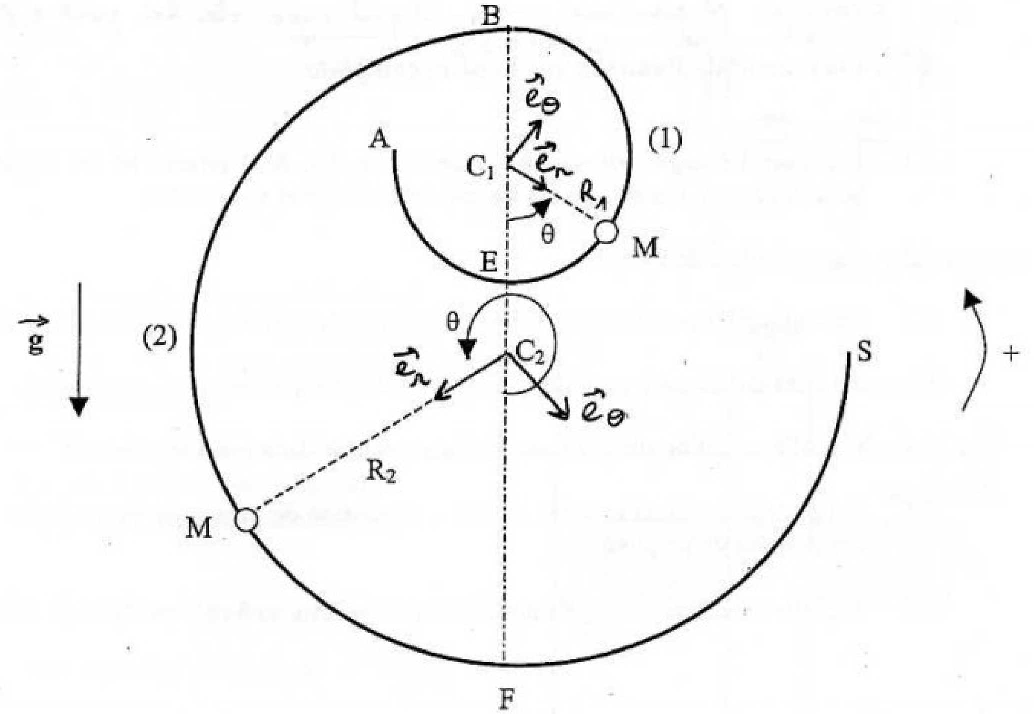
9. Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire

On considère le dispositif de la figure ci-dessous, où un anneau assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste formée de deux parties circulaires (1) et (2) de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, de centres C_1 et C_2, dans un plan vertical.

On repère la position de l'anneau par l'angle θ pris à partir de C_1 pour son mouvement sur la partie (1), et à partir de C_2 pour son mouvement sur la partie (2).

Sur la partie (1), θ varie entre $-\pi/2$ et π. Sur la partie (2), θ varie entre π et $5\pi/2$.

On note g la constante de gravitation terrestre.



Dans tout le problème, on suppose que le mouvement de l'anneau s'effectue sans frottements.

Dans un premier temps, le mouvement de l'anneau a lieu sur la partie (1) du dispositif. À l'instant $t=0$, l'anneau se trouve au point $E(\theta=0)$, avec une vitesse angulaire initiale positive $(d\theta/dt)_0$.

Remarque : on pourra utiliser la notation « point » pour la dérivée temporelle.

A/ Mouvement de l'anneau sur la partie (1)

On se limite ici à la partie (1) de la piste.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p, de l'anneau M en fixant $E_p=0$ au point $B(\theta=\pi)$.
2. En déduire le carré de la vitesse angulaire $(d\theta/dt)^2$ à une position quelconque en fonction des données du problème R_1, $(d\theta/dt)_0$, g et θ.
3. En déduire l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.

On admet pour les deux questions qui suivent (4 et 5, mais pas 6) l'hypothèse que θ est suffisamment petit pour assimiler $\sin\theta$ à θ

4. Déterminer l'expression complètement déterminée de $\theta(t)$. Déterminer la valeur maximale de $\theta(t)$: θ_{max}.
5. Application numérique : $R_1=1\,\text{m}$, $g=10\,\text{m/s}^2$ et $(d\theta/dt)_0=1\,\text{rad/s}$.

Calculer la pulsation, la période et l'amplitude maximale (θ_{max}) du mouvement. L'approximation $\sin\theta = \theta$ est-elle valable ?

6. On note $\overline{N} = N_r$, coordonnée radiale (projection sur $\vec{e}_r$) de la réaction $\vec{N}$ de la piste sur l'anneau.
   a) Pourquoi est-ce la seule coordonnée de $\vec{N}$?
   b) Exprimer $\overline{N}$ pour une position quelconque de l'anneau sur la partie (1) de la piste, en fonction de *m*, R_1, $(d\theta/dt)_0$, g et θ.
   c) Étant donné le système considéré (anneau sur piste filiforme), le signe de $\overline{N}$ est-il imposé ou peut-elle éventuellement changer de signe ?

B/ Mouvement de l'anneau sur la piste complète (1)+(2)

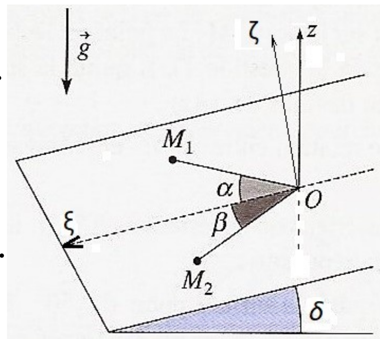
1. Avec le même choix du zéro qu'à la question A/1., exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, E_p, de l'anneau M sur la partie (2).

   Tracer l'allure de $E_p(\theta)$ dans tout le domaine $[-\pi/2 \; ; 5\pi/2]$.
2. Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau en précisant leur stabilité.

L'anneau étant initialement en $A(\theta = -\pi/2)$, il est lancé à une vitesse v_0 sur la piste.

3. À quelle condition sur la vitesse v_0 l'anneau peut-il atteindre le point F ?
4. Cette condition étant tout juste remplie, donner l'expression de sa vitesse v_F au point $F(\theta = 2\pi)$ en fonction des données du problème.
5. À quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en $S(\theta = 5\pi/2)$?

10. Plan incliné (décomposition 3D)



On considère un plan incliné d'un angle δ par rapport à l'horizontale.

L'axe vertical est noté *z*, alors que l'axe perpendiculaire au plan incliné est noté ζ.

La ligne de plus grande pente du plan incliné est notée ξ : il s'agit de la demi-droite de référence des coordonnées polaires du mouvement.

En effet, le point *M* est accroché à un fil toujours tendu, de longueur *L* fixé en *O*.

Le point *M* est lâché de la position initiale $\theta = -\alpha$, sans vitesse, et atteint la position $\theta = +\beta$ avant de repartir en arrière.

On a $\beta < \alpha$, car il existe des frottements solides de coefficient dynamique *f*. On néglige tout frottement fluide.

a) Écrire la RFD, représenter la base cylindropolaire utile pour l'étude du mouvement, en un point *M* **quelconque** de la trajectoire, et déterminer les coordonnées du vecteur accélération dans cette base, en fonction de *L* et des dérivées temporelles de *θ*.
b) Déterminer les coordonnées des forces dans cette base, en fonction de leur norme.

   Dans le cas du poids, décomposer $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_\xi ; \vec{u}_\zeta)$ d'abord, puis décomposer à nouveau si besoin dans la base polaire.
c) En déduire une expression reliant θ, ses dérivées, et des constantes.
d) Intégrer cette expression entre l'état initial et l'état final, pour obtenir l'expression du coefficient de frottement en fonction de seulement δ, α et β.