DM 9 CHUTES LIBRES CORRECTION

A/ Parabole de sûreté

1. Voir cours : $z(x)=\tan\alpha\ x-\dfrac{g^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2$

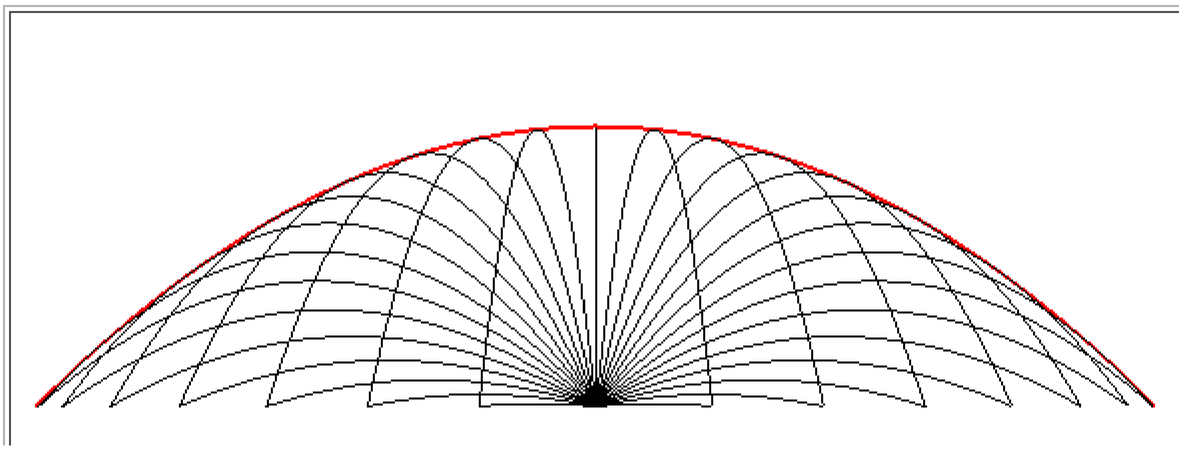
2. Voir cours : $h=\dfrac{v_0^2}{2g}$

3. On remplace $z_0=x_0 t-\dfrac{g}{2v_0^2}(1+t^2)x^2$ avec $\dfrac{g}{v_0^2}=\dfrac{1}{2h}$ donc $z_0=x_0 t-\dfrac{(1+t^2)}{4h}x_0^2$

4. On arrange l'équation (forme canonique) : $z_0=x_0 t-\dfrac{x_0^2}{4h}-\dfrac{x_0^2}{4h}t^2 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{4h}t^2-x_0 t+z_0+\dfrac{x_0^2}{4h}=0$
ou encore (on enlève les dénominateurs) : $x_0^2 t^2-4hx_0 t+4hz_0+x_0^2=0$.
Il y a au moins une solution (ou deux) ssi le discriminant est positif ou nul :
$\Delta=(4hx_0)^2-4x_0^2(4hz_0+x_0^2)$. $\Delta\geq 0\Leftrightarrow 4h^2-(4hz_0+x_0^2)\geq 0\Leftrightarrow 4hz_0\leq 4h^2-x_0^2$ et finalement $z_0\leq f(x_0)$ avec $\boxed{f(x_0)=h-\dfrac{1}{4h}x_0^2}$

5. et 6. Parabole de concavité vers le bas, maximale et valant h en $x_0=0$, donc symétrique par rapport à l'axe des z_0 . Tous ceux qui sont en-dessous sont susceptibles d'être touchés par le boulet. Inversement, ceux qui sont au-dessus seront épargnés quel que soit l'angle de tir.

L'enveloppe de toutes les trajectoires des tirs issus d'un point donné avec une vitesse de départ constante est aussi une parabole dénommée *parabole de tir ou de sûreté*.



B/ Introduction à la balistique extérieure

1. Cas (a) : frottements négligés

   a) Référentiel : terrestre, galiléen ; Système : (M;m) ; Contrainte : aucune. BdF : Poids seul
   RFD : $m\vec{a}=\vec{P}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{g}$, mvt à vecteur accélération constant, qu'on intègre donc.
   $\vec{V}=\vec{g}t+\vec{cte}$. Avec la CI sur la vitesse, on trouve $\vec{V}=\vec{g}t+\vec{V}_0$.

On intègre une deuxième fois pour obtenir le vecteur position : $\vec{OM}=\vec{g}\frac{1}{2}t^2+\vec{V}_0 t+\text{cte}$ où la constante est nulle car M passe par l'origine à la date nulle.

b) Lors du retour au sol, on a $y=0$: il faut donc projeter sur les axes.
De façon évidente $\vec{V}_0=\begin{pmatrix}V_0\cos A_0\\ V_0\sin A_0\end{pmatrix}$ et $\vec{g}=\begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix}$, ce qui donne $y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0\sin A_0 t$.
La date de retour au sol est la solution non nulle de l'équation soit $t_S=\frac{2V_0\sin A_0}{g}$, qu'on remplace dans les projections du vecteur vitesse : $\vec{V}_S=\begin{pmatrix}0+V_0\cos A_0\\ -gt_S+V_0\sin A_0\end{pmatrix}$ soit $\vec{V}_S=\begin{pmatrix}V_0\cos A_0\\ -V_0\sin A_0\end{pmatrix}$.

c) On a $E_m=E_c+E_{pp}$ avec $E_{pp}=mgy$ ici mais qui s'annule au début et à la fin du mouvement.
Donc $E_m(0)=\frac{1}{2}mV_0^2$ et $E_m(t_S)=\frac{1}{2}mV_S^2=\frac{1}{2}mV_0^2(\cos^2A_0+(-\sin A_0)^2)=\frac{1}{2}mV_0^2=E_m(0)$.
Elle se conserve car il n'y a pas de frottements donc pas de forces non conservatives.

2. Cas (b) : frottements visqueux, de forme $-\alpha\vec{V}$

a) L'étude est la même avec une force supplémentaire, d'où la RFD $m\vec{a}=m\vec{g}-\alpha\vec{V}$, puis l'ED d'ordre 1 $m\frac{d\vec{V}}{dt}+\alpha\vec{V}=m\vec{g}$.
La constante de temps $\tau=\frac{m}{\alpha}$ apparaît dans la forme canonique de l'ED, ainsi que la vitesse limite, $\vec{V}_\infty=\tau\vec{g}$ égale à la solution particulière constante de l'équation.

b) $\vec{V}_\infty$ est comme $\vec{g}$ verticale vers le bas : on a donc $A_\infty=(Ox,\vec{V}_\infty)=-\frac{\pi}{2}$.

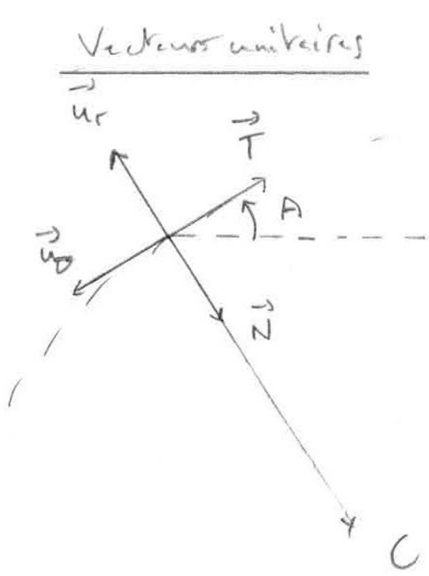
c) Même démarche qu'à la partie précédente : $\vec{OM}=-\tau(\vec{V}_0-\vec{V}_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}+\vec{V}_\infty t+\text{cte}$, qui doit s'annuler à la date nulle donc $\vec{OM}=\tau(\vec{V}_0-\vec{V}_\infty)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)+\vec{V}_\infty t$, puis
$y=\tau(V_0\sin A_0+\tau g)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\tau g t$.
L'exponentielle décroissante est alors négligeable devant 1 et l'équation devient
$V_0\sin A_0+\tau g=gt$ soit $t_S=\tau\left(1+\frac{V_0\sin A_0}{\tau g}\right)$.

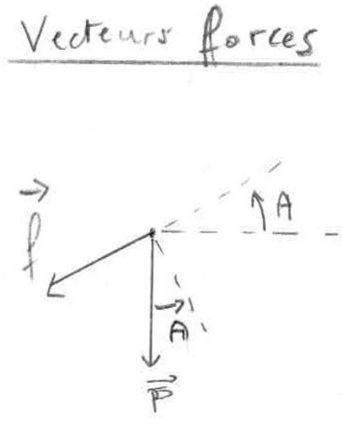
d) On a alors $E_m(t_S)=\frac{1}{2}mV_\infty^2=\frac{1}{2}m\tau^2g^2$, puisque, avec cette approximation, $\vec{V}_S=\vec{V}_\infty$. Par ailleurs $E_m(0)=\frac{1}{2}mV_0^2$.
Comme $t_S\gg\tau$, $t_S=\tau\left(1+\frac{V_0\sin A_0}{\tau g}\right)$ donne que $V_0\sin A_0\gg\tau g$: $V_0^2>V_0^2\sin^2A_0\gg\tau^2g^2$, donc $E_m(0)\gg E_m(t_S)$.
La variation de l'énergie est négative, ce qui est normal, puisqu'elle est égale aux travaux des forces non conservatives, ici les frottements opposés au mouvement. C'est évidemment vrai tout le long de la trajectoire : l'énergie mécanique décroît à chaque instant.

3. Cas (d) : expression générale des frottements

a) Il faut absolument refaire un schéma où l'angle A est positif (cf cours de SII), ce qui n'est pas le cas sur la figure de l'énoncé.

Attention, les 2 vecteurs de Frenet sont opposés aux 2 vecteurs de base de la base polaire : c'est clair pour $\vec{u}_r$; $\vec{u}_\theta$ indique le sens trigonométrique donc est





(séparés car pas de couleurs disponibles...)

effectivement opposé au sens de la trajectoire.
C'est bien sûr la deuxième loi de Newton, avec $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{f}$.
En projetant les forces sur la base de Frenet $(\vec{N},\vec{T})$, on a de façon évidente $\vec{f}=\begin{pmatrix}0\\-f\end{pmatrix}$ et

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}P\cos A\\P\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\cos A\\-P\sin A\end{pmatrix} .$$

En utilisant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires en fonction de la vitesse qu'il n'est pas absurde de redémontrer rapidement $\vec{a}=-\frac{V^2}{R}\vec{u}_r+\frac{d\overline{V}}{dt}\vec{u}_\theta$, la deuxième équation est évidente (égalité entre l'accélération à gauche et le membre à droite).
Ici le mouvement est dans le sens horaire, la valeur de la vitesse est donc négative : $\overline{V}=-V$ soit $\frac{d\overline{V}}{dt}\vec{u}_\theta=-\frac{dV}{dt}\vec{u}_\theta=+\frac{dV}{dt}\vec{T}$, ce qui donne la première équation en étudiant correctement les signes.
Pour le deuxième terme dans la seconde équation, on a $\frac{V^2}{R}=V|\omega|=-V\omega=-V\frac{dA}{dt}$ car la vitesse angulaire est négative, et car $\theta=A+\frac{\pi}{2}$.

b) En régime permanent pour la vitesse, celle-ci n'évolue plus, donc la RFD devient $\vec{0}=\vec{P}+\vec{f}$: les frottements compensent le poids, et sont donc de même norme.
On en déduit que $r_\infty=1$.
La première équation devient $0=-g\sin A_\infty-g\times 1$, soit $\sin A_\infty=-1$ et $A_\infty=-\frac{\pi}{2}$.

c) On obtient $\frac{d(V\cos A)}{dA}=0$. Comme l'angle change à chaque instant, c'est que $V\cos A$ est une constante du mouvement : c'est cohérent avec le cas sans frottements car $V_x=V\cos A=V_0\cos A_0$.

d) On a $\frac{d(V\cos A)}{dA}=\frac{dV}{dA}\cos A-V\sin A$, puis en appliquant la règle de dérivation : $\frac{dV}{dA}=\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dA}=(-g\sin A-g r(V))\left(-\frac{V}{g\cos A}\right)=\frac{V\sin A+V r(V)}{\cos A}$, donc $\frac{d(V\cos A)}{dA}=V r(V)$.