PCSI2 – DM 11 POUR VENDREDI 07/02

ÉTUDE D'UN FLIPPER

On étudie le flipper dont un schéma de principe est représenté page suivante.
La bille est assimilée à un point matériel M de masse m, qui se déplace sans frottement dans le plan de jeu du flipper. Ce plan de jeu est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On considère que la trajectoire de cette bille est guidée par un rail rectiligne dans la direction y, de longueur PA = L, puis par un rail en forme de demi-cercle, de centre Ω et de rayon a. On considérera que le contact entre la bille et les guides se font eux aussi sans frottement.
La bille est propulsée par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, de longueur à vide l_0.
On prendra l'origine de l'axe (Oy) à l'extrémité libre du ressort, lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte : PO = l_0.
$\overrightarrow{e_\xi}$, $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont des vecteurs unitaires.

1°) Questions de cours

a- Etablir l'expression du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération pour un mouvement circulaire de centre Ω et de rayon a.

b- Montrer que le poids de la bille dérive d'une énergie potentielle $E_{Pot\,pes}$ dont on donnera l'expression en fonction de ξ.

c- Montrer que la force de rappel élastique exercée par le ressort sur la bille dérive de l'énergie potentielle : $E_{Pot\,él} = \frac{1}{2} k\, y^2$.

d- Calculer soigneusement le travail d'une force de contact sans frottement.

2°) Lancer de la bille

Un dispositif adéquat dépose la bille sur le ressort, en O. Le joueur comprime alors le ressort d'une longueur d (c'est-à-dire y = -d), puis libère le tout à un instant que l'on peut choisir comme origine des temps t = 0.

a- Montrer que l'énergie mécanique se conserve pendant le mouvement. Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial.

b- Déterminer la distance y_{max} que serait susceptible de parcourir la bille si le rail rectiligne était de longueur infini.

c- En considérant que le rail rectiligne est en fait de longueur finie PA = L, établir une relation que d doit satisfaire pour que la bille atteigne A. On établira cette relation à l'aide de k, m, g, α, L et l_0.
Décrire le mouvement si cette condition n'est pas atteinte.

3°) Bille sur le rail circulaire

On considère dans la suite que d est suffisant pour que la bille atteigne le rail circulaire.
On considère qu'à un instant donné, la bille est située en un point du rail circulaire repéré par l'angle θ, où sa vitesse est v (en norme).

a- Donner l'expression du poids à l'aide du vecteur $\overrightarrow{e_\xi}$, puis de $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, et enfin en fonction de $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

Pour la suite, on pourra remarquer que le plan du jeu exerce sur la bille une force normale (car sans frottement) dans la direction $\overrightarrow{e_z}$, et que le rail circulaire exerce sur la bille une force normale (car sans frottement) dans la direction $-\overrightarrow{e_r}$.

b- Donner l'expression de la force de contact exercée par le rail circulaire sur la bille en fonction de m, v, a, g, α et θ, puis, en éliminant la vitesse v, en fonction de k, d, a, m, g, α, d, L, l_0 et θ.

On pose $\psi = \dfrac{k\,d^2 - 2mg\sin\alpha\,(d + L - l_0)}{a}$. Montrer qu'il y a contact tant que : $\sin\theta \leq \dfrac{\psi}{3mg\sin\alpha}$.

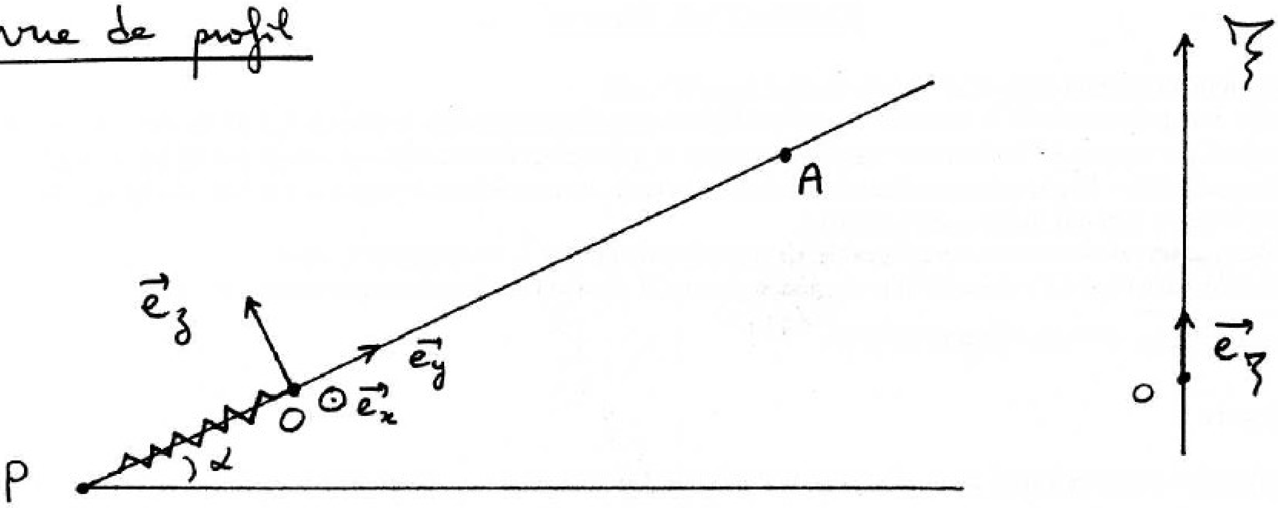
On pourra remarquer que ψ est supposé positif dans toute la question 3°).

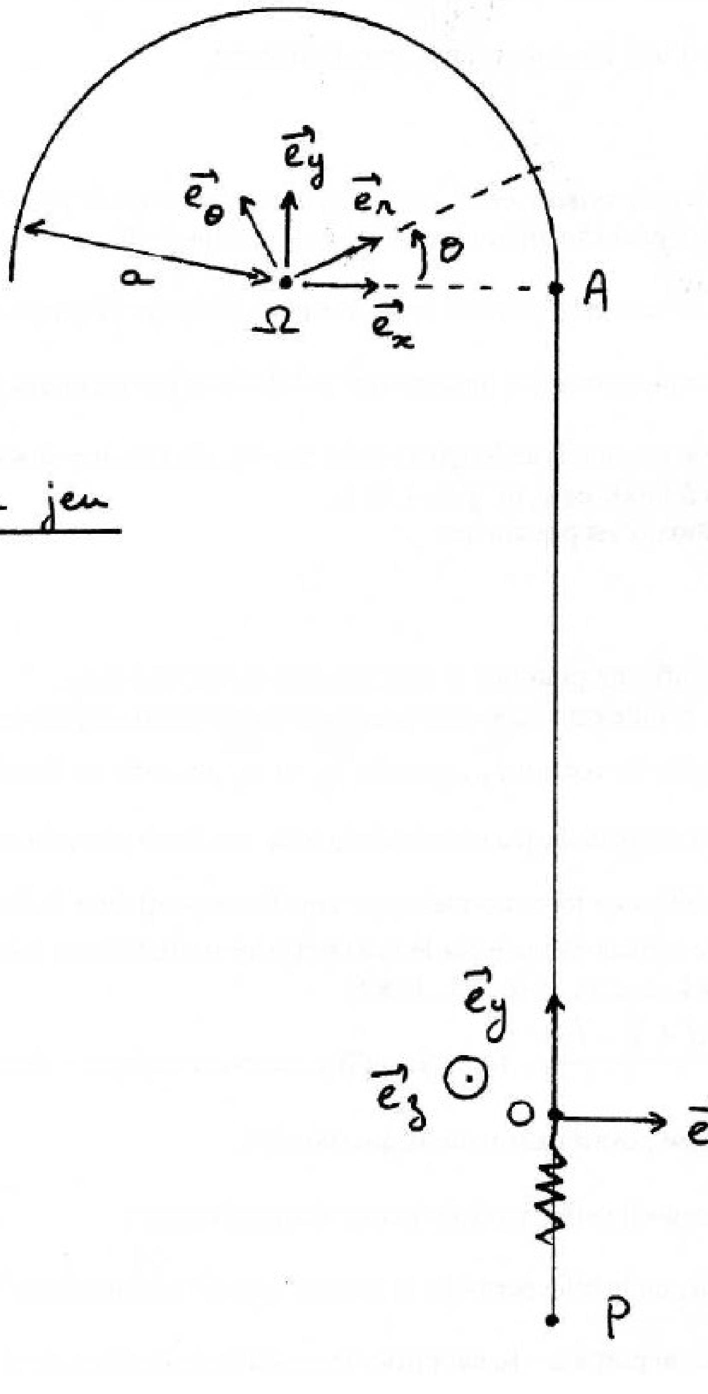
c- A quelle condition sur ψ la bille peut-elle effectuer tout le tour du demi-cercle ?

d- Si cette condition n'est pas remplie, où la bille perd-elle le contact avec le rail circulaire ?

e- En considérant que d est faible par rapport à L - l_0, simplifier les conditions établies sur d au 2°) c- et au 3°) c- .

vue de profil





vue dans le plan de jeu