

Modèle de Thomson

1. L'énoncé impose les coordonnées cartésiennes, et on obtient très simplement :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + 2\alpha \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

2. En régime permanent ne restent plus que les SP des équadiffs obtenues : elles sont d'ordre 2, à coefficients constants positifs, donc les solutions générales homogènes tendent vers 0.

Il n'y a donc aucun mouvement sur y et sur z en RP, et la SP sur x doit être trouvée en passant dans les complexes, car c'est une sinusoïde de pulsation égale à celle de l'excitation, donc du champ électrique, soit ω .

3. On peut donc poser $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ soit $x(t) = X \exp i(\omega t + \varphi) = X \exp i \omega t$

pour déterminer l'amplitude $X = |\underline{X}| = \frac{e E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$.

L'accélération est la dérivée seconde de la position, donc par les complexes, on trouve que l'amplitude est multipliée par ω^2 (le signe disparaît) :

$$A = \frac{e E_0 \omega^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

4. On garde le terme dominant au dénominateur : $A = \frac{e E_0 \omega^2}{m \omega_0^2}$
5. La puissance rayonnée est donc proportionnelle à ω^4 donc beaucoup plus importante (16 fois) pour le violet que pour le rouge : le violet de la lumière blanche est donc rayonné dans toutes les directions, le ciel semble bleu violet, et le soleil jaune orange (couleur complémentaire du bleu violet).

Mouvement palet

1. RFD sur $x = \text{cours}$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$, $K = \frac{\alpha_F}{m}$, $x_{\text{éq}} = l_0$
2. Equadiff d'ordre avec second membre. Selon le signe du discriminant Δ de l'éq homogène, on a 3 possibilités : $\Delta > 0 \Rightarrow$ régime apériodique, $\Delta = 0 \Rightarrow$ régime critique, $\Delta < 0 \Rightarrow$ régime pseudopériodique.
3. $\Delta = 0$: $K^2 - 4\omega_0^2 = 0$, et comme tout est positif : $K = 2\omega_0$ donc $\alpha_F = 2\sqrt{k_0 m}$

La SP est $x_p = x_{\text{éq}} = l_0$. La SGH est $x_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ car la racine double est

$$-\frac{K}{2} = -\omega_0 \text{ .}$$

$x(0)=B+l_0=l_0$: $B=0$ donc $x(t)=Ate^{-\omega_0 t}+l_0$ et $\dot{x}(t)=Ae^{-\omega_0 t}-A\omega_0 te^{-\omega_0 t}$
donc $A=-v_0$ et $x(t)=l_0-v_0 t e^{-\omega_0 t}$

4. x min donc $\dot{x}(t)=Ae^{-\omega_0 t}-A\omega_0 te^{-\omega_0 t}=0$: $t_{\text{MIN}}=\frac{1}{\omega_0}$ et en remplaçant :

$x_{\text{MIN}}=l_0-\frac{v_0}{\omega_0 e}$ car $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Allure : retour vers $x_{\text{éq}}=l_0$ qui est aussi la valeur initiale, sans oscillations ; tangente à l'origine négative $(-v_0)$.

5. On remplace $v(t)=\dot{x}(t)=v_0 e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t-1)$ donc

$\dot{v}(t)=-\omega_0 v_0 e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t-1)+v_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t}=v_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t}(2-\omega_0 t)$: v est donc croissante jusqu'à $t_{\text{MAX}}=\frac{2}{\omega_0}$ et décroissante ensuite, pour tendre vers 0.

6. C'est bien à $t_{\text{MAX}}=\frac{2}{\omega_0}$: dès que la vitesse du patin décroît, le contact est perdu,

car le patin ne peut que pousser le palet et ne le retient pas ; le palet continuera son mouvement de façon uniforme.

La vitesse vaut à ce moment : $v(t_{\text{MAX}})=v_0 e^{-2}(2-1)=v_0 e^{-2}=\frac{v_0}{e^2}$

7. Avant le choc (pas de contact du palet avec le dispositif) : $E_m=E_c=\frac{1}{2}m v_0^2$

8. Après le choc (plus de contact) : $E'_m=E'_c=\frac{1}{2}m v_0^2 e^{-4}$. On peut définir le

coefficient de restitution du choc comme le rapport des énergies mécaniques :

$r=e^{-4}=1,83\%$, donc 98,17% de l'énergie mécanique a disparu et a été transformée en énergie thermique par les frottements de l'amortisseur.

Ce dispositif est donc très efficace en tant que système de freinage.

Réponse harmonique stabilisée

1. Définition A fixe, pas de frottements

BDF : \vec{P} , \vec{T} , $\vec{F}_1=-k(L_1-l_0)\vec{u}_x$, $\vec{F}_2=-k(L_2-l_0)(-\vec{u}_x)$

RFDx : $m\ddot{x}=-T\sin\theta-k(l+x-l_0)+k(l-x-l_0)$

RFDz : $0=+T\cos\theta-mg$

Petits angles : $\cos\theta\approx 1$

On a $x=l\sin\theta$: $m\ddot{x}+\left(2k+m\frac{g}{l}\right)x=0$, donc $\omega_0=\sqrt{2\frac{k}{m}+\frac{g}{l}}$

2. Seule différence : $L_1=l+x-y$: $m\ddot{x}+\left(2k+m\frac{g}{l}\right)x=k y$ donc $\ddot{x}+\omega_0^2 x=\Omega^2 Y_m \cos\omega t$

En régime établi, même pulsation pour x et y : $x(t)=X_m \cos(\omega t+\varphi)$, et on passe dans C

$$x(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}, \quad y(t) = Y_m e^{j\omega t} : \underline{X}_m = Y_m \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{donc} \quad X_m = Y_m \frac{\Omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad \text{et}$$

$$\varphi = 0 \text{ pour } \omega < \omega_0, \quad \varphi = \pi \text{ pour } \omega > \omega_0.$$

3. Terme d'amortissement : passe-bas résonnant.

4. Il faut redémontrer que $X_{m,\max} = X_m \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$: avec $X_{m,\max} = 1,1 X_m$, on trouve $Q = 0,9$.

Deux ressorts

a)

b) Réf : Terre, galiléenne

Système : {M;m}

Contrainte : mvt selon x =>
accélération selon x (le poids et réaction se compensent alors)

Bdf :

Poids \vec{P} , réaction normale \vec{R}_N (pas de frottements), forces de rappel élastiques

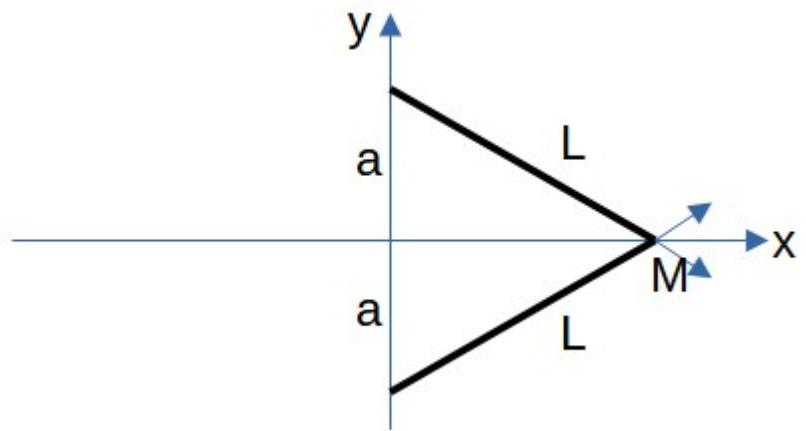
$$\vec{F}_1 = -k(L - L_0)\vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -k(L - L_0)\vec{u}_2 \quad \text{avec} \quad L = \sqrt{a^2 + x^2}$$

RFD sur x : $ma_x = F_{1x} + F_{2x}$, avec $\frac{u_{1x}}{x} = \frac{1}{L}$ (Thalès par exemple, ou trigo avec le cosinus de l'angle)

$$\text{D'où : } ma_x = -2k(L - L_0)\frac{x}{L} \quad \text{donc l'ED : } m\ddot{x} + 2kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0$$

c) On raye les dérivées partielles pour trouver la ou les solutions constantes :

- $x_0 = 0$ est toujours une solution
- les autres vérifient $\sqrt{a^2 + x^2} = L_0$ soit $x^2 = L_0^2 - a^2$ qui n'existent que si $a < L_0$ et sont alors $x_1 = +\sqrt{L_0^2 - a^2}$ et $x_2 = -\sqrt{L_0^2 - a^2}$, symétrique.



Suspension de voiture

1. $z = L + R$ $\vec{u}_{R \text{ vers } S} = +\vec{u}_z$

2. Ref: Terre, galiléen; Sys: Châssis; Géométrie: immobilité; BDF: \vec{P} ,

appel élastique $\vec{F} = -k(L - L_0)\vec{u}_{R \rightarrow S}$; RDF: $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$;

sur (0g) ! $0 = -mg - k(L - L_0) \Rightarrow L_{Eq} = L_0 - \frac{mg}{k}$, bien $< L_0$:

normal car ressort comprimé. $z_{Eq} = L_{Eq} + R$.

3. a) Étude avec frottements en plus $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$ donc :

$$m \ddot{z} = -mg - k(L - L_0) - \lambda \dot{z}$$

↳ inconnue donc pas une équation diff, mais Q1:

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}(z - R - L_0) - \frac{\lambda}{m} \dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m}(L_0 + R)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{Eq}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$

$$\Rightarrow Q = \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$$

↳ on reconnaît

$$z_{Eq} \times \frac{k}{m}$$

3. b) on est alors en régime aperiodique critique $\Leftrightarrow \Delta_{E.CAR} = 0$

$$(E.CAR) : r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$$

donc $\lambda = 2\sqrt{km}$

3. c) Racine double $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$: solution générale :

$$z(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t) + z_{Eq}$$

CI: $z(0) = z_{Eq} - h \quad ; \quad B = -h$

$$\dot{z}(0) = 0 \text{ avec } \dot{z}(t) = A \exp(-\omega_0 t) + (At + B)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t)$$

donc $0 = A - B\omega_0 \quad ; \quad A = B\omega_0 = -h\omega_0$

donc $z(t) = z_{Eq} - h(1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$

4. m augmenté donc $Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$ aussi \rightarrow régime pseudo-periodique: oscillations

inconfortables.

$$\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) < 0 \quad ; \quad \Delta = \left(j 2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right)^2$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega_0}{Q} \pm j 2\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right] = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega \text{ avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Solution générale $z(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) + z_{Eq}$

CI: $z(0) = z_{EQ} - h$; $A = -h$

$$\dot{z}(t) = (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right)$$

avec $\dot{z}(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = B\omega - A \frac{\omega_0}{2Q}$

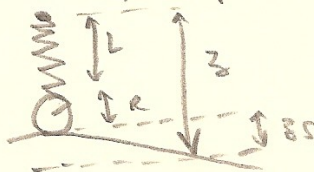
soit $B = -\frac{h}{2Q} \frac{\omega_0}{\omega} = -h \frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = -\frac{h}{\sqrt{4Q^2-1}}$

Finalment: $z(t) = z_{EQ} - h \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \left[\cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \sin \omega t\right]$

5. a) On a simplement $x = vt$ (vitesse uniforme selon x).

b) Énoncé $f = -\lambda \vec{v}_{chaus/paves}$; or $\vec{v}_{ch/R} = \vec{v}_{ch/Terre} - \vec{v}_{R/Terre}$.

On a de plus, pour la longueur L du ressort



$z = L + R + z_s$

c) L'équation est

$$m \ddot{z} = -mg - k(L - L_0) - \lambda(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

\downarrow
 $z - R - z_s$

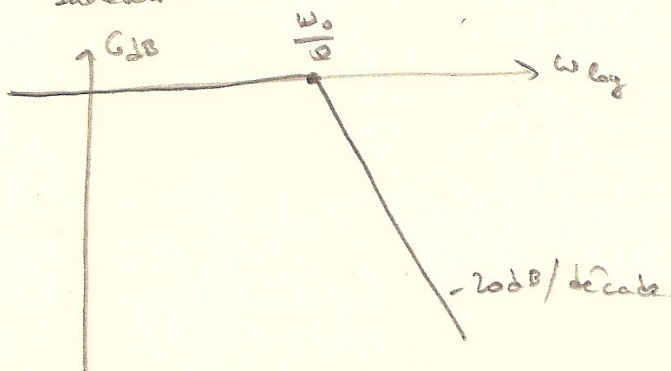
soit $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m} (L_0 + R) + \frac{k}{m} z_s + \frac{\lambda}{m} \dot{z}_s$

d) donc $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0}{Q} z_s^0 + \omega_0^2 z_s$ Car $\frac{k}{m} (z - z_{EQ}) = \omega_0^2 u$

c) $\underline{H} = \frac{j \frac{\omega_0}{Q} \omega + \omega_0^2}{-\omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega + \omega_0^2}$

	\underline{H}	φ	G	G_{dB}
TBF	1	0	1	0
THF	$-j \frac{\omega_0}{Q\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\omega_0}{Q\omega}$	$20 \log \frac{\omega_0}{Q\omega}$ $-20 \log \omega$

Filtre passe bas d'ordre 2, mais avec une pente THF de -20 dB/décade seulement.



f) \Rightarrow pour $\omega \leq \frac{\omega_0}{2Q}$ soit $\frac{2\pi}{\Lambda} v \leq \frac{\omega_0}{2Q}$

$\Rightarrow v \leq \frac{\omega_0 \Lambda}{4\pi Q}$, et l'oscillation du châssis suit celle du sol, ce qui est assez inconfortable si la vitesse est élevée.

\rightarrow Pour une vitesse bien plus élevée, les oscillations sont filtrées et le châssis ne bouge presque plus.

Équation proies – prédateurs (de Volterra-Lotka)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma) \end{cases} \quad \text{où } (\alpha, \beta, \delta, \gamma) \text{ sont 4 constantes positives.}$$

a) Première affirmation : $\frac{dy}{dt} = -\gamma y$, de solution générale $y(t) = Y_0 e^{-\gamma t}$:
décroissance exponentielle.

Deuxième affirmation : $\frac{dx}{dt} = \alpha x$, de solution générale $x(t) = X_0 e^{\alpha t}$: croissance exponentielle.

Troisième affirmation : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{préd}} = -\beta(yx)$ (variation due aux prédateurs seuls).

Quatrième affirmation : idem 3ème pour les prédateurs.

b) Il faut se débarrasser de y : on ne peut l'exprimer qu'avec l'équation des proies :

$$y = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta x} \frac{dx}{dt}.$$

Dans l'équation des prédateurs, on le remplace : $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\beta x^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\beta x} \frac{d^2 x}{dt^2}$ donc

$$\frac{1}{\beta x^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\beta x} \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta x} \frac{dx}{dt} \right) (\delta x - \gamma).$$

On peut essayer de l'arranger un peu : $\frac{dx}{dt} - x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\alpha x^2 - x \frac{dx}{dt} \right) (\delta x - \gamma)$ soit

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} - [1 + x(\delta x - \gamma)] \frac{dx}{dt} + \alpha x^2 (\delta x - \gamma) = 0$$

c) Dérivées temporelles nulles : $\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y) \\ 0 = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{\text{éq}} = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_{\text{éq}} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$