Correction DM Flipper

1°) Cours

a) On note bien sûr $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ les vecteurs de la base polaire de pôle Ω et θ l'angle polaire.
On a alors $\boxed{\vec{\Omega M}=a\vec{e}_r}$ et, en dérivant par rapport au temps (a est une constante) : $\boxed{\vec{v}=a\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$, puis $\boxed{\vec{a}=-a\dot{\theta}^2\vec{e}_r+a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}$.

b) Répondre à cette question signifie qu'on peut trouver une fonction $E_{p,pes}$ telle que $dE_{p,pes}=-\delta W(\vec{P})$ où, ce qui revient au même mais est un peu plus pratique, montrer que, sur n'importe quel trajet $A\rightarrow B$, il existe une fonction $E_{p,pes}$ telle que $\Delta_{AB}E_{p,pes}=-W_{A\rightarrow B}(\vec{P})$.
On calcule donc le travail du poids, c'est une force constante donc $W_{A\rightarrow B}(\vec{P})=\vec{P}\cdot\vec{AB}$, travail qui ne dépend pas du chemin : $\vec{P}$ est donc bien conservative, la fonction $E_{p,pes}$ existe bien.

On doit donc avoir $\Delta_{AB}E_{p,pes}=-\vec{P}\cdot\vec{AB}$ avec $\Delta_{AB}E_{p,pes}=E_{p,pes}(B)-E_{p,pes}(A)$.
Il suffit donc de poser $E_{p,pes}(M)=-\vec{P}\cdot\vec{OM}$ pour que ça marche $(\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA})$. On peut ajouter une constante à $E_{p,pes}$, mais cela ne sert à rien.

On passe ensuite aux coordonnées (on peut le faire avant, comme dans le cours) : $\vec{P}=-mg\vec{e}_\xi$, le seul terme non nul du produit scalaire sera donc $P_\xi.OM_\xi$. Comme $OM_\xi=\xi$ (la coordonnée du vecteur position sur l'axe vertical est l'altitude), on a bien sûr $\boxed{E_{p,pes}(M)=mg\xi}$

c) Même principe, on peut travailler en différentielles pour changer un peu : il faut trouver une fonction $E_{p,el}$ telle que $dE_{p,el}=-\delta W(\vec{F})=-\vec{F}\cdot\vec{dr}$.
Le vecteur unitaire $\vec{e}_y$ est bien dirigé du ressort vers l'extrémité, et on a choisi l'origine O de telle sorte qu'elle corresponde au ressort détendu : la force de rappel s'écrit donc $\vec{F}=-k\,y\vec{e}_y$ ($y_0=0$ avec ce choix de O). Le déplacement possible est selon *(Oy)*, donc $\vec{dr}=dy\,\vec{e}_y$.
On en déduit $dE_{p,el}=+k\,y\,dy=d\left(\frac{1}{2}k\,y^2\right)$ qui ne dépend pas du chemin suivi (le petit déplacement $dy\,\vec{e}_y$ est le seul chemin possible, mais l'expression obtenue ne dépend pas de la façon de suivre ce chemin, donc de la vitesse).
On peut donc poser $E_{p,el}=\frac{1}{2}k\,y^2$ (mathématiquement, deux différentielles sont égales lorsque les fonctions correspondantes ne diffèrent que d'une constante, mais on choisit la constante nulle ici).

d) Une force de contact sans frottement est perpendiculaire au support : on la note $\vec{R}_N$, donc $\delta W=\vec{R}_N\cdot\vec{dr}$. Cette expression est toujours nulle, car $\vec{dr}$ est un déplacement qui a lieu le long du support. On obtient le travail sur tout chemin (sur le support bien sûr!)
$W_{A\rightarrow B}(\vec{R}_N)=\int_{A\rightarrow B}\delta W=0$

2°) Lancer de la bille

a) L'énoncé précise qu'il n'y a pas de frottements (on les néglige), il n'y a donc pas de forces conservatives. Le TEM pour un point matériel donne sur tout chemin
$\Delta_{AB}E_M=\sum W_{A\rightarrow B}F_{NC}=0$.
Donc E_M ne varie pas, quel que soit le chemin : elle se conserve pendant le mouvement.
On a donc $E_M=E_{M0}=E_{C0}+E_{p,pes,0}+E_{p,el,0}$.

L'énergie cinétique initiale est nulle, car la vitesse initiale est nulle (c'est bien sûr une fonction continue du temps).

Le ressort est comprimé de la longueur d : $E_{p,\acute{e}l,0}=\frac{1}{2}k\,d^2$ .L'altitude correspondant à $y=-d$ est $\xi_0=-d\sin\alpha$. On en déduit $\boxed{E_M=\frac{1}{2}k\,d^2-m\,gd\sin\alpha}$

b) On se place au maximum atteint : on a encore $E_{Cf}=0$ car la vitesse s'annule en ce point (puisqu'elle y change de sens), il n'y a pas d' $E_{p,\acute{e}l}$ (pas de contact avec le ressort) et $E_{p,pes,f}=m\,g\,y_{\max}\sin\alpha$ car l'altitude $\xi_{\max}=y_{\max}\sin\alpha$.

D'où $E_{Mf}=m\,g\,y_{\max}\sin\alpha$ avec $E_M=E_{Mf}$: $\frac{1}{2}k\,d^2-m\,gd\sin\alpha=m\,g\,y_{\max}\sin\alpha$ donc

$$\boxed{y_{\max}=-d+\frac{k\,d^2}{2\,m\,g\sin\alpha}}$$

c) On doit donc avoir $y_{\max}\geq OA$ avec $L=PA=PO+OA=l_0+OA$.

La condition est donc $\boxed{-d+\frac{k\,d^2}{2\,m\,g\sin\alpha}\geq L-l_0}$, du second degré en d, qu'il ne sert à rien de chercher à résoudre. Si la condition n'est pas vérifiée, la bille redescend, comprime le ressort, qui se détend à nouveau, puis la bille remonte et ainsi de suite : il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique se conserve et l'amplitude du mouvement de la bille ne diminue pas avec le temps.

Ce n'est pas réaliste bien sûr : les frottements ne sont pas totalement négligeables.

3°) Bille sur le rail circulaire

a) On a bien sûr $\vec{P}=-m\,g\vec{e}_\xi$. On voit que $(\vec{e}_\xi,\vec{e}_z)=\alpha$ et que $\vec{e}_\xi$ est vers l'avant du vecteur $\vec{e}_y$ donc $\vec{e}_\xi=\sin\alpha\,\vec{e}_y+\cos\alpha\,\vec{e}_z$.

De plus, on voit dans le plan du jeu que $(\vec{e}_y,\vec{e}_\theta)=\theta$ et que $\vec{e}_y$ est vers l'avant de $\vec{e}_r$: $\vec{e}_y=\sin\theta\,\vec{e}_r+\cos\theta\,\vec{e}_\theta$.

Finalement $\vec{P}=-m\,g\left(\sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_r+\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_\theta+\cos\alpha\,\vec{e}_z\right)$

b) On applique le PFD sur la bille, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Les forces subies sont son poids $\vec{P}$, la réaction du flipper $\vec{R}_f$, normale donc $\vec{R}_f=R_f\vec{e}_z$ et la réaction normale du rail notée $\vec{R}=-R\,\vec{e}_r$.

PFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}_f+\vec{R}$. On cherche à déterminer R : seule nous intéresse sa coordonnée sur $\vec{e}_r$.

Donc $-m\frac{v^2}{a}=-m\,g\sin\alpha\sin\theta-R$ soit $\boxed{R=m\frac{v^2}{a}-m\,g\sin\alpha\sin\theta}$ (*a* est le rayon du cercle ici, pas l'accélération de *M*).

Pour éliminer *v*, on utilise le théorème de l'énergie mécanique : $E_M=\frac{1}{2}m v^2+m\,g\xi$: il faut donc exprimer l'altitude ξ en fonction de θ : $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{A\Omega}+\vec{\Omega M}$, avec $\xi(\vec{OA})=(L-l_0)\sin\alpha$, $\xi(\vec{A\Omega})=0$ et $\vec{\Omega M}=a\vec{e}_r$ et donc $\xi(\vec{\Omega M})=a\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\xi=a(\sin\alpha\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_y+\cos\alpha\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z)$ en remplaçant $\vec{e}_\xi$ par l'expression obtenue au a).

Comme $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z=0$ et $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, on trouve $\xi(\vec{\Omega M})=a\sin\alpha\sin\theta$, soit en remplaçant tout ça dans le TEM : $\frac{1}{2}k\,d^2-m\,gd\sin\alpha=\frac{1}{2}m v^2+m\,g(L-l_0)\sin\alpha+m\,ga\sin\alpha\sin\theta$

d'où $m v^2=k\,d^2-2\,m\,g(d+L-l_0)\sin\alpha-2\,m\,ga\sin\alpha\sin\theta$.

On commence à voir apparaître ψ : $m v^2 = a\psi - 2mga\sin\alpha\sin\theta$ soit $m\frac{v^2}{a} = \psi - 2mg\sin\alpha\sin\theta$ et finalement $\boxed{R = \psi - 3mg\sin\alpha\sin\theta}$.

Il y a contact tant que $R \geq 0$ soit $\psi \geq 3mg\sin\alpha\sin\theta$ donc $\boxed{\sin\theta \leq \frac{\psi}{3mg\sin\alpha}}$ car $\sin\alpha > 0$.

c) Il faut que la condition précédente soit vérifiée pour toute valeur de θ : il faut et il suffit donc que $\boxed{\psi > 3mg\sin\alpha}$

d) La bille perd le contact pour la première valeur de θ qui ne vérifie pas la condition du 3°)b. D'après le schéma, c'est la plus petite, donc le contact est rompu pour $\boxed{\theta = \mathrm{Arcsin}\,\frac{\psi}{3mg\sin\alpha}}$

e) On a obtenu à la question 2°)c $-d + \frac{kd^2}{2mg\sin\alpha} \geq L - l_0$ soit $\frac{kd^2}{2mg\sin\alpha} \geq L - l_0 + d$.
Si d est négligeable par rapport à $L - l_0$, l'équation du second degré devient très simple à résoudre $\boxed{d \geq \sqrt{\frac{2mg\sin\alpha}{k}(L - l_0)}}$ pour que M atteigne A.
Au 3°)c, on a obtenu $\psi > 3mg\sin\alpha$ avec $\psi \approx \frac{1}{a}\left[kd^2 - 2mg\sin\alpha\,(L - l_0)\right]$ ce qui donne $kd^2 \geq 2mg\sin\alpha(L - l_0) + 3mga\sin\alpha$ et donc $\boxed{d \geq \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}[2(L - l_0) + 3a]}}$ pour qu'il y ait toujours contact avec le rail circulaire.