Éléments cinématiques en cylindrique

a) On sait (on peut le redémontrer) que $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} 2a_0 t \\ \omega_0(a_0 t^2 + r_0) \\ -v_0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$.

Pour l'accélération $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ soit $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} 2a_0 - \omega_0^2(a_0 t^2 + r_0) \\ 4a_0\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$

b) On a $v_R = \sqrt{(2a_0 t)^2 + \omega_0^2(a_0 t^2 + r_0)^2 + v_0^2} = 5{,}1\ \text{m/s}$ à $t = 1\,\text{s}$

c) On a $a_R(0) = \left|2a_0 - \omega_0^2 r_0\right| = 7{,}0\ \text{m/s}^2$.

Château d'Amboise

a) Le pas correspond à l'augmentation d'altitude après un tour : $\Delta\theta = 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{\omega}$ donc $\Delta z = h = \frac{2\pi a}{\omega}$

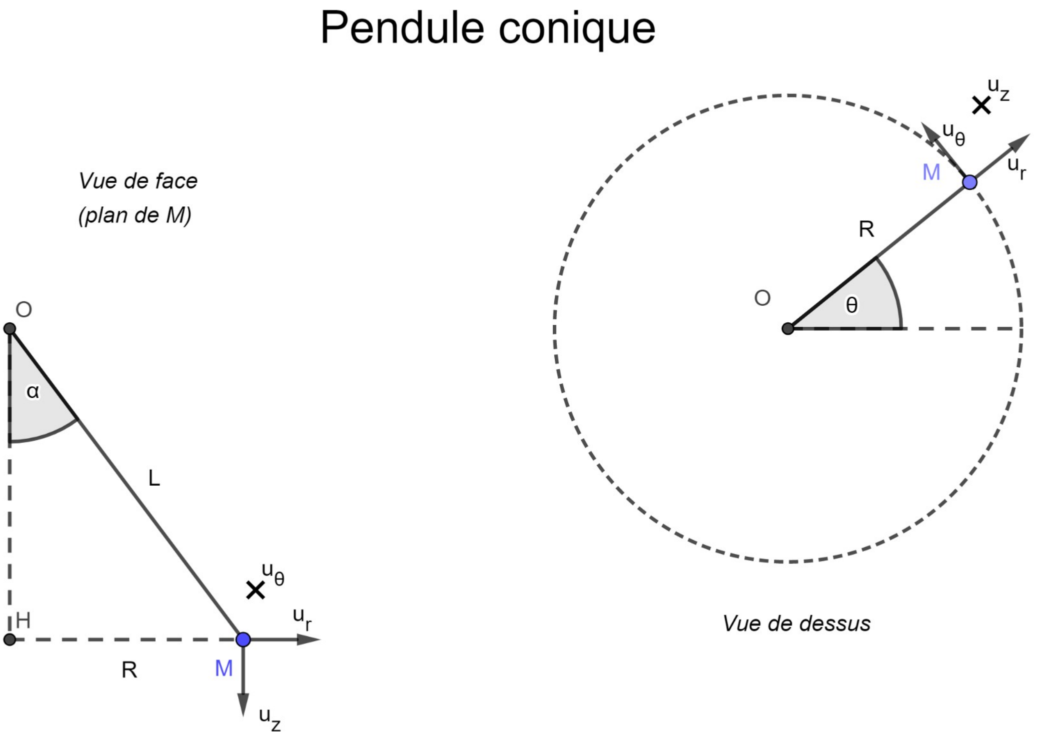
b) Il faut bien sûr utiliser les coordonnées cylindriques : $\vec{v}_R : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\boxed{\vec{v}_R : \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ a \end{pmatrix}_{\text{cyl}}}$.

On a également $\vec{a}_R : \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{\text{cyl}}$ donc $\boxed{\vec{a}_R : \begin{pmatrix} -r\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{cyl}}}$: l'accélération est radiale (attention en cylindriques : dirigée vers l'axe, pas vers l'origine des coordonnées).

c) On en déduit $\boxed{v = \sqrt{r^2\omega^2 + a^2}}$ qu'on peut exprimer en fonction de r et h : $\boxed{v = \omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}$

d) Lancelot est un chevalier d'Arthur, personnage des romans de la Table Ronde écrits au XIIIème siècle, c'est donc bien antérieur à la construction de l'escalier d'Amboise sous Charles VIII, à la fin du XVème siècle.

Pendule conique



Réf : Terrestre, galiléen Système : M de masse m

Contrainte : MC => coordonnées cylindropolaires (les forces ne sont pas dans le plan).

On a pris l'axe *z* vers le bas : c'est correct tant qu'on n'utilise pas l'énergie potentielle de pesanteur, ni le produit vectoriel (qui impose que la base soit directe).

Remarque : une approche énergétique ne donnerait rien ici, car toutes les formes d'énergie sont constantes…

BdF : Poids $\vec{P}$, tension du fil $\vec{T}$, clairement pas de frottements qui ramèneraient M à la verticale…

RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{T}$: *T* est inconnue, il faut projeter.

Projections :

* cinématique pour $\vec{a}$: on introduit $R=L\sin\alpha$, rayon de la trajectoire, et $z=L\cos\alpha=OH$

$\vec{OM}=R\vec{u}_r+z\vec{u}_z$ avec *R* et *z* constants, donc $\vec{v}=R\omega\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}=-R\omega^2\vec{u}_r+R\dot{\omega}\vec{u}_\theta$

* c'est trivial pour le poids

* pour la tension

En ramenant l'angle α à l'origine M, on voit que (c'est une solution possible) l'angle entre $\vec{u}_z$ et $\vec{T}$ est $\pi+\alpha$: $T_z=T\cos(\pi+\alpha)=-T\cos\alpha$

Il faut retrancher π/2 pour obtenir : $T_r=T\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-T\sin\alpha$

C'est cohérent avec le sens de $\vec{T}$: vers l'arrière des deux vecteurs unitaires.

D'où le système :

$$\begin{cases} -m R \omega^2 = -T \sin\alpha \\ m R \dot{\omega} = 0 \\ 0 = P - T \cos\alpha \end{cases}$$

: $\dot{\omega}=0$ donc ω est constante et (attention, c'est en fonction de L qu'il faut obtenir la relation) : $m L \sin\alpha\, \omega^2 = \frac{m g}{\cos\alpha} \sin\alpha$.

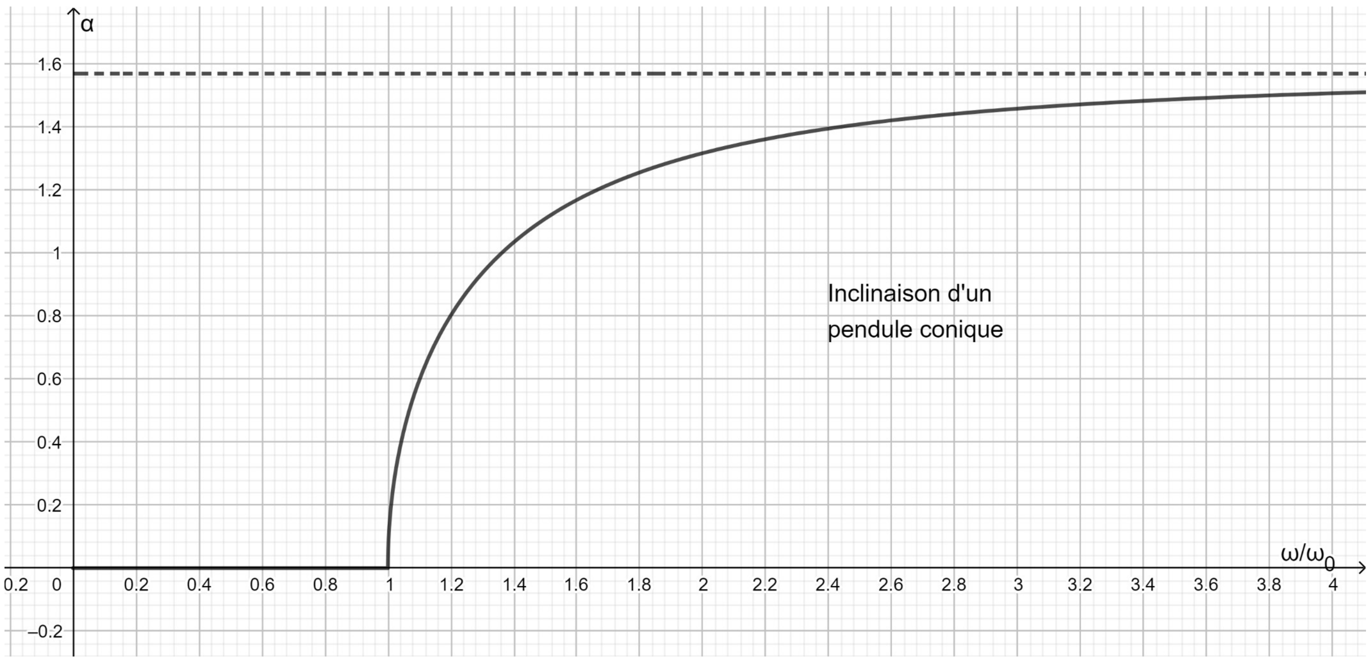
Donc soit $\sin\alpha = 0$ (pendule vertical), soit $L\omega^2 = \frac{g}{\cos\alpha}$: $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{g}{L\omega^2}\right)$ (cos est bijectif sur le domaine de α qui est [0,π]).

On doit trouver le domaine de définition de la fonction avant toute chose : il faut que $\frac{g}{L\omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \geq \omega_0$, en introduisant la pulsation propre des petites oscillations du pendule $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

La fonction à étudier se ramène alors à $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{X^2}\right)$, définie à partir de 1, en posant $X = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Limites ensuite : en $X \to 1_+$, $\alpha \to 0$; en $X \to +\infty$, $\alpha \to \mathrm{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure (ce qui est très logique : le pendule tourne alors très vite, et on sent bien qu'il ne peut pas dépasser l'horizontale).

La dérivée de Arccos tend vers $-\infty$ quand son argument tend vers 1 : la tangente en 1 est donc verticale (le signe opposé vient du fait que 1/X² est une fonction décroissante).

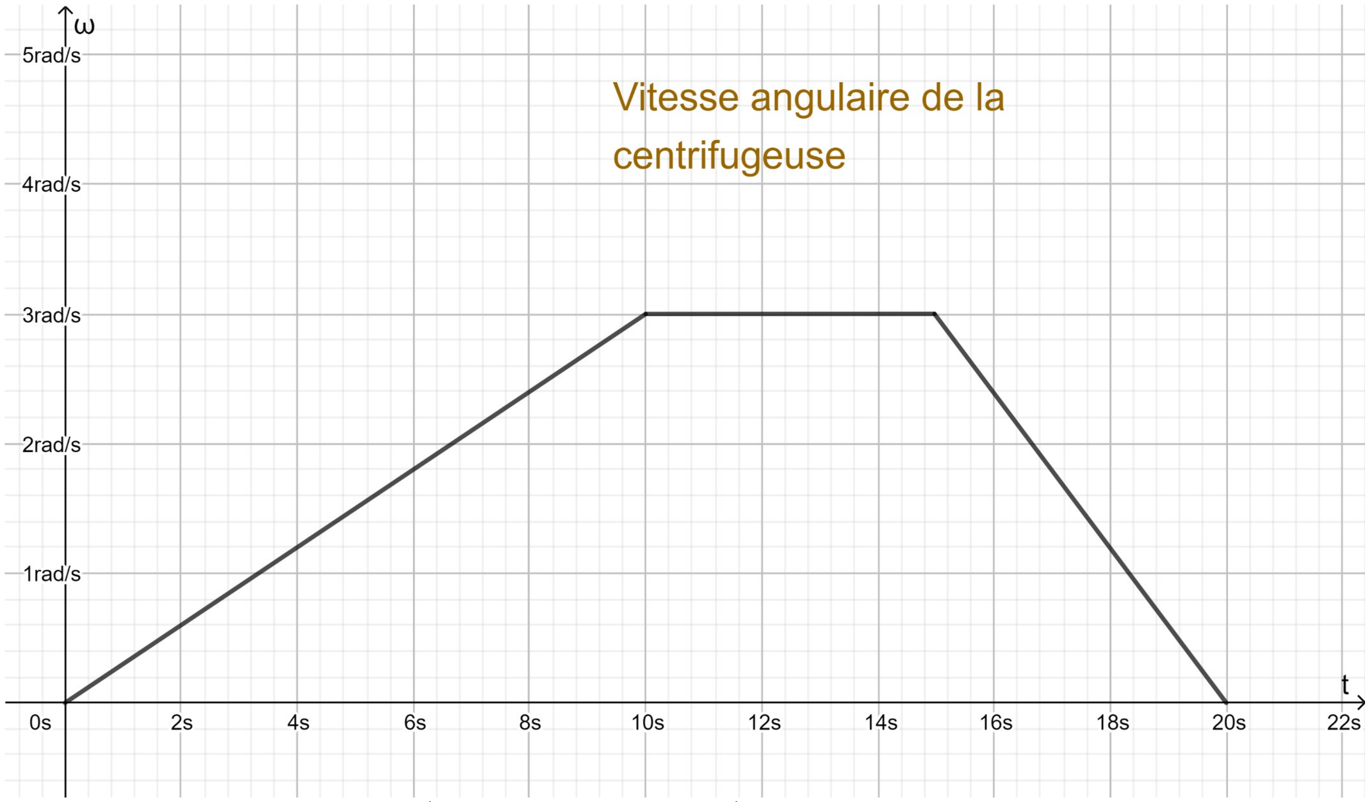


On voit l'inclinaison prendre des valeurs importantes dès que ω dépasse un peu ω_0 ...

Pour $\omega < \omega_0$ qui est bien sûr physiquement possible (rotation lente), la seule solution est donc $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Astronaute en entraînement

a) Solution astucieuse, graphique : on connaît l'évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps, donc on la trace.



Comme $\omega=\dot{\theta}$, on a $[\theta(t)]_0^t=\int_0^t \omega(t)\,dt$ donc $\theta(t)=\int_0^t \omega(t)\,dt$, aire sous la courbe.

Soit $\theta=\frac{1}{2}\tau_1\omega_M+\tau_2\omega_M+\frac{1}{2}\tau_3\omega_M$ avec les notations évidentes : $\omega_M=3{,}0\,\text{rad/s}$, $\tau_1=2\tau_2=2\tau_3=10\,\text{s}$ (expression littérale d'abord, c'est mieux)

Donc $\theta=\frac{\omega_M}{2}(\tau_1+2\tau_2+\tau_3)=37{,}5\,\text{rad}$ dont en tours : $\theta=\frac{37{,}5\,\text{rad}}{2\pi\,\text{rad/tr}}=5{,}97\,\text{trs}$

Solution calculatoire : on intègre en prenant une primitive à chaque étape ; il est alors plus simple de réinitialiser la date à 0 à chaque fois, et de sommer les 3 angles obtenus.

Première phase : MCUA signifie que la valeur de la vitesse augmente régulièrement, donc, puisque le rayon est constant, que l'accélération angulaire est constante ; notons la γ.

$\ddot{\theta}=\gamma \Rightarrow [\dot{\theta}]_0^t=[\gamma t]_0^t$ soit $\omega(t)=\gamma t$ avec $\omega(\tau_1)=\omega_M$ donc $\gamma=\frac{\omega_M}{\tau_1}=0{,}3\,\text{rad/s}^2$.

En intégrant une seconde fois, on obtient $\theta(t)=\frac{1}{2}\gamma t^2$ donc $\theta(\tau_1)=\frac{1}{2}\gamma\tau_1^2=\frac{1}{2}\omega_M\tau_1=15\,\text{rad}$

La **seconde phase** est triviale ; attention à la CI pour la **troisième phase**.

b) L'accélération radiale est la plus grande quand ω est maximale, et l'accélération tangentielle quand la dérivée de ω est maximale en valeur absolue.

Pas de doute, il y a une date exactement où les deux sont maximales : la sensation sera la pire à $t=15\,\text{s}$ $\left(a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}\right)$.

Ressort tournant autour de O

Référentiel : terrestre galiléen

Système : point M de masse m

Contrainte : mouvement circulaire de rayon r

BdF : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{R}_N$, rappel élastique $\vec{F}=-k(L-L_0)\vec{u}_{R\to M}$

avec ici : $L=r$ et $\vec{u}_{R\to M}=+\vec{u}_r$ en coordonnées cylindropolaires ; en effet, même si le mouvement est plan, les forces sont en 3 dimensions.

RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}_N+\vec{F}$ où il faut déterminer l'accélération, car coordonnées non cartésiennes.

$\vec{OM}=r\vec{u}_r$ donc, r étant constant (cercle) : $\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ puis $\vec{a}=r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ où l'on ne suppose pas a priori $\omega=\dot{\theta}$ constante (on peut le prouver).

Projections : sur la base cylindrique $(\vec{u}_r;\vec{u}_\theta;\vec{u}_z)$

$$\begin{cases} -mr\omega^2=-k(r-L_0) \\ mr\dot{\omega}=0 \\ 0=+R_N-P \end{cases}$$

où l'on voit que ω est constante, que la réaction compense le poids (mais c'est toujours à prouver), et où l'on tire l'équation souhaitée $mr\omega^2=k(r-L_0)$ soit $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{L_0}{r}}$, en introduisant la pulsation propre du système masse-ressort $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

On voit d'après l'expression trouvée que le mouvement circulaire (donc uniforme ici) n'est possible que si $r>L_0$ et que la vitesse angulaire du mouvement tend vers ω_0 pour un ressort infiniment étiré.

Course de voitures

(a) On a $L_A=\pi r_A=283\,\text{m}$ et $L_B=\pi r_B+2OO'=266\,\text{m}$: la distance parcourue est plus faible pour la voiture B .

(b) En dérivant $\vec{OM}=r\vec{u}_r$, la vitesse est $\vec{v}_R:\begin{pmatrix}0\\ r\dot{\theta}\end{pmatrix}_{\text{pol}}$: $\vec{v}_R=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $v_R=r\dot{\theta}=\text{cte}$ donc $\dot{\theta}=\frac{v}{r}=\text{cte}$. On obtient $\vec{a}_R:\begin{pmatrix}-r\dot{\theta}^2\\ 0\end{pmatrix}_{\text{pol}}$ soit $\vec{a}_R=-\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$ et donc $\boxed{v=\sqrt{ra}}$: $v_A=\sqrt{90\,\text{m}\times 0{,}8\times 9{,}81\,\text{m/s}^2}$ soit $\underline{v_A=26{,}6\,\text{m/s}}$ et de même $\underline{v_B=24{,}3\,\text{m/s}}$.

(c) On a $\tau_A=\frac{L_A}{v_A}$ car le mouvement est uniforme donc $\underline{\tau_A=10{,}6\,\text{s}}$ et de même $\underline{\tau_B=10{,}9\,\text{s}}$: la durée est donc plus importante pour B que pour A . Il est donc préférable de négocier un virage large.

Mouvement oscillant sur un cercle

(a) La période du sinus est 2π donc $T=\frac{2\pi}{\Omega}$.

(b) L'angle θ varie entre $-\pi$ et $+\pi$, mais à ces positions le mobile fait demi-tour. La vitesse angulaire est $\omega=\dot{\theta}=\pi\Omega\cos\Omega t$: elle n'est pas constante.

(c) On a donc $\sin\Omega t_1=\frac{1}{2}$ soit pour la première date $\Omega t_1=\frac{\pi}{6}$ soit $t_1=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{T}{2\pi}$: $\boxed{t_1=\frac{T}{12}}$

(d) On obtient $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\ r\dot{\theta}\end{pmatrix}_{\text{pol}}$ soit $\boxed{\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\ \pi\, R\Omega\cos\Omega t\end{pmatrix}_{\text{pol}}}$

(e) On trouve $\vec{a}=\begin{pmatrix}-r\dot{\theta}^2\\ r\ddot{\theta}\end{pmatrix}_{\text{pol}}$ avec $\dot{r}=0$, $\ddot{r}=0$ et $\ddot{\theta}=-\pi\,\Omega^2\sin\Omega t$ donc

$\boxed{\vec{a}=\begin{pmatrix}-\pi^2 R\,\Omega^2\cos^2\Omega t\\ -\pi\, R\,\Omega^2\sin\Omega t\end{pmatrix}_{\text{pol}}}$

(f) On peut écrire $\vec{a}=-\pi\, R\,\Omega^2\begin{pmatrix}\pi\cos^2\Omega t\\ \sin\Omega t\end{pmatrix}_{\text{pol}}$ donc $a^2=\left(\pi\, R\,\Omega^2\right)^2\left[\pi^2\cos^4\Omega t+\sin^2\Omega t\right]$

L'accélération sera maximale lorsque $A=\pi^2\cos^4\Omega t+\sin^2\Omega t$ l'est : posons $U=\cos^2\Omega\, t$.

On a alors $A=\pi^2 U^2+1-U$ et $\dfrac{dA}{dU}=0=2\pi^2 U-1$ donc pour $U_0=\dfrac{1}{2\pi^2}$.

Étudions A : $A(0)=1$, $A(1)=\pi^2$ et $A(U_0)=1-\dfrac{1}{4\pi^2}$.

U_0 est donc un minimum : A est maximal pour $U=1$ soit pour $\Omega\, t=0+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ donc pour $t_2=k\dfrac{T}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Chaussette séchant dans un sèche-linge

1 et 2.

La chaussette est entraînée par le tambour : il faut supposer des frottements solides (sinon, elle reste en bas du tambour).

Réf : terre galiléen ; Système : chaussette ; Contrainte : MCU ;

BDF : Poids $\vec{P}$, Réaction normale $\vec{R}_N$ du tambour vers la chaussette, Réaction tangentielle $\vec{R}_T$

Forces dans le plan : les coordonnées polaires suffisent

RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}_N+\vec{R}_T$

Projections : $\vec{OM}=R\vec{u}_r$ donc $\vec{v}=R\omega\vec{u}_\theta$ puis $\vec{a}=-R\omega^2\vec{u}_r$

$\vec{R}_N=\begin{pmatrix}-R_N\\ 0\end{pmatrix}$ de façon évidente ; on n'est pas certain du signe de la coordonnée de la réaction tangentielle, on note donc $\vec{R}_T=\begin{pmatrix}0\\ \overline{R}_T\end{pmatrix}$ (valeur algébrique).

En ramenant le vecteur poids en O ou bien l'angle θ en M, on voit que l'angle entre $\vec{P}$ et $\vec{u}_r$ est $\dfrac{\pi}{2}+\theta$, donc vaut $\pi+\theta$ avec $\vec{u}_\theta$; donc $\vec{P}=\begin{pmatrix}-P\sin\theta\\ -P\cos\theta\end{pmatrix}$

D'où les équations : $\begin{cases}-mR\omega^2=-R_N-P\sin\theta\\ 0=\overline{R}_T-P\cos\theta\end{cases}$

On voit que $\overline{R}_T=P\cos\theta$ est positif (dans la partie droite du tambour) et que $R_N=m(R\omega^2-g\sin\theta)$

3. C'est une différence : elle s'annule en $\theta=\text{Arcsin}\left(\dfrac{R\omega^2}{g}\right)$

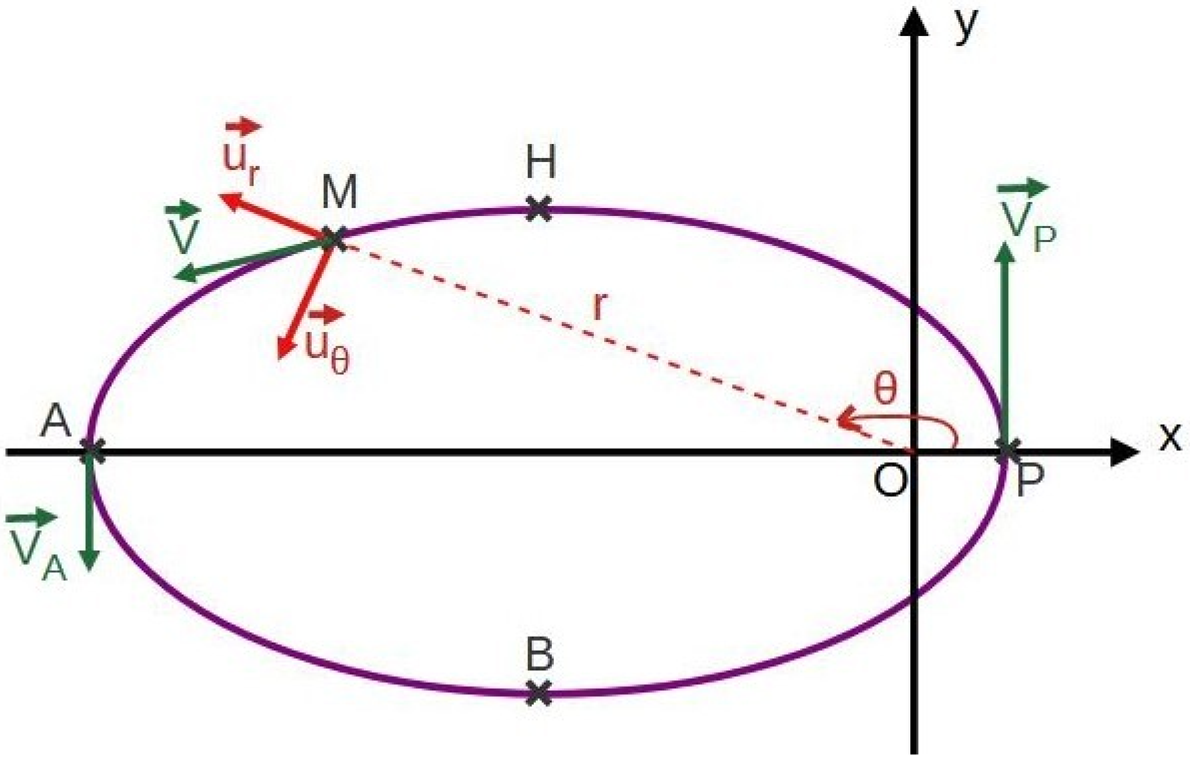
4. Perte de contact : le mouvement devient parabolique avec la vitesse initiale $\vec{v}_0=R\omega\vec{u}_\theta$, à traduire en base cartésienne si l'on souhaite un résultat explicite.

Trajectoire d'une comète

1. La distance r à O est minimale quand $\cos\theta$ est maximal, donc égal à 1, pour $\theta=0$, donc au point P : $r_P=\frac{p}{1+e}$

   Elle est maximale quand $\cos\theta=-1$ donc $\theta_A=\pi$ et $r_A=\frac{p}{1-e}$

2.



3. Voir cours, l'accélération orthoradiale, qui doit est nulle, est $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$.

   Comme le mouvement n'est pas circulaire, cela n'implique pas qu'il est uniforme.

   C constante $\Leftrightarrow\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0$ donc $2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0$ soit $r\,a_\theta=0$, ce qui est bien vérifié.

   En P, $\dot{r}=0$ (distance minimale), donc $v_P=r\dot{\theta}$ purement orthoradiale : $C=r_P v_P$

4. En A aussi, la vitesse est purement orthoradiale, puisque *r* max implique $\dot{r}=0$: $C=r_A v_A$.

   Donc $v_A=\frac{r_P}{r_A}v_P=\frac{1-e}{1+e}v_P$.

Quatre mouches

(a) On voit qu'il y a en permanence le même angle entre $\vec{v}$ et les vecteurs de la base polaire : $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_A)=\frac{\pi}{4}$ et $(\vec{u}_r, \vec{v}_A)=\frac{3\pi}{4}$. On en déduit que $\vec{v}_A \cdot \vec{u}_\theta = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{u}_r = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc que $\boxed{\vec{v}_A = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_r + v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_\theta}$

(b) On a $\vec{v}_A = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc $\dot{r} = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$: $r_A(t) = r_A(0) - v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}[t]_0^t$. Comme $r_A(0) = l\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $\boxed{r_A(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(l - v_0 t)}$.

Les mouches atteignent donc le centre du carré à la date annulant r_A donc pour $\boxed{t_1 = \frac{l}{v_0}}$.

(c) On a également $r\dot{\theta} = v_\theta = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\dot{\theta} = \frac{v_0}{l - v_0 t}$: $\theta = \theta(0) + \int_0^t \dot{\theta}(t) dt$ et $\theta(0) = 0$

Cherchons une primitive : le dénominateur est positif pendant le mouvement, et $\dot{\theta}$ est de la forme $\frac{K}{at+b}$.

Dérivons la primitive vraisemblable à une constante près : $\frac{d}{dt}[\ln(l - v_0 t)] = -\frac{v_0}{l - v_0 t}$: on en déduit $\theta(t) = -[\ln(l - v_0 t)]_0^t$ soit $\theta(t) = -\ln(l - v_0 t) + \ln l$: $\boxed{\theta(t) = \ln\left(\frac{l}{l - v_0 t}\right)}$.

On remarque que $\lim_{+\infty} \theta = +\infty$: les mouches traversent les axes un nombre infini de fois.

Pour obtenir l'équation polaire, il faut remplacer la date par l'angle dans $r_A(t)$:

$\ln(l - v_0 t) = \ln l - \theta$: $l - v_0 t = l e^{-\theta}$ et donc $\boxed{r(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} l e^{-\theta}}$