TD 17 – Forces centrales, gravitation

Donnée : constante universelle de la gravitation $G=6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$

1. Objectif Lune

Données : pesanteur au sol $g_0=9{,}8\,\text{m/s}^2$ et rayon terrestre $R_T=6\ 370\,\text{km}$

(a) Définir et calculer la *seconde vitesse cosmique* ou *vitesse de libération* v_2.

(b) Dans la bande dessinée *Objectif Lune* de Hergé, on peut lire ces mots des ingénieurs qui suivent la fusée transportant Tintin : « *Observatoire à Station Contrôle... La fusée est à présent à 3 185 km de son point de départ. Elle vient d'atteindre la vitesse de libération, soit 9 km 133 m à la seconde. Tout semble normal.* »
Hergé s'est-il trompé ? Justifier précisément.

2. Chez le Petit Prince

a) Debout sur le sol terrestre, lorsque vous sautez à pieds joints, de quelle hauteur *h* environ vous élevez-vous ?
Quelle quantité *E* d'énergie mécanique a été créée par le travail musculaire ?

b) Évaluez le rayon *R* d'un corps céleste sphérique tel qu'en sautant à pieds joints, on échappe à sa pesanteur. On supposera que *E* (que vous avez créée) reste inchangée.

Données : volume d'une boule de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$; masses volumiques typiques (kg/m^3) : eau 1000, roches 2500, métaux 7000.

3. Masse de l'étoile

On observe la trajectoire circulaire d'une planète extrasolaire : sa période est *T* égale à 150 jours solaires (le jour usuel terrestre) et sa distance à l'étoile est *d* égale à 200 millions de kilomètres.

En déduire la masse *M* de l'étoile, et comparer avec celle du Soleil : $M_S=2{,}0\cdot10^{30}\,\text{kg}$.
La planète vous semble-t-elle habitable ? (faire une recherche sur internet pour voir de quel type d'étoile il peut s'agir).

4. Freinage d'un satellite quasi circulaire

On s'intéresse à un satellite terrestre de masse *m* en orbite circulaire à l'altitude *h*. Déterminer en fonction des données (+AN) :

(a) sa vitesse *v*, son énergie cinétique E_c, et son énergie mécanique E_m.

(b) la période *T* de son mouvement ;

(c) Dans les couches supérieures de l'atmosphère, ce satellite est faiblement freiné par une force de frottement fluide en régime turbulent de norme $f=\alpha m v^2$ où α est une constante positive et *v* la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique $\Re_0$.
En admettant que sa trajectoire reste circulaire, exprimer, après une révolution, les variations ΔE_m de son énergie mécanique et ΔE_c de son énergie cinétique en fonction des constantes, de *v* et de *T*. Quelle sera la trajectoire complète du satellite ?

Données : $R_T=6\ 370\,\text{km}$; $g_0=9{,}81\,\text{m.s}^{-2}$; $h=300\,\text{km}$; $m=1\,\text{kg}$; $\alpha=1{,}0\cdot10^{-10}\,\text{uSI}$

5.

Lancement d'un satellite GPS

Le lancer d'un satellite depuis une navette spatiale s'effectue en trois étapes successives : la navette est d'abord mise sur orbite circulaire, au moyen de fusées auxiliaires ; à partir de cette orbite circulaire, la navette éjecte le satellite qui gagne progressivement une altitude plus élevée ; enfin, une fois parvenu à son altitude définitive, le satellite s'y stabilise au moyen d'un dispositif de freinage. Dans la première phase, la navette et son satellite sont solidaires. Avec l'équipage et la charge utile, l'ensemble est assimilé à un point matériel unique de masse M. Le tout est en orbite circulaire d'altitude h et de rayon $r = R + h$, où R est le rayon de la Terre. On appelle g_0 l'accélération de la pesanteur au niveau du sol. On prendra $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et $R = 6\,400\ \mathrm{km}$ pour les applications numériques.

1 • Déterminer, dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{G})$ supposé galiléen, en fonction des constantes M, R et g_0, la vitesse $v(r)$, la vitesse angulaire $\omega_0(r)$ et l'énergie mécanique $\mathcal{E}(r)$ de l'ensemble.

2 • Avant le lancement, la fusée était placée sur un pas de tir situé à la latitude λ. Déterminer la variation d'énergie mécanique entre le lancement (avant la mise en route des fusées) et l'arrivée sur orbite circulaire, en fonction de r, R, M, g_0, λ et T, période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

3 • Commenter le choix de λ permettant, avec des moteurs donnés, la mise en orbite la plus favorable.

4 • *A.N.* : L'orbite à atteindre est située à l'altitude de 300 km. Calculer l'économie d'énergie réalisée par unité de masse du système lancé, lors du passage du pas de tir d'Edwards (Californie, $\lambda_1 = 34°50'$N) à celui de Cap Canaveral (Floride, $\lambda_2 = 28°30'$N) (à titre documentaire, un gramme d'essence fournit typiquement 40 kJ dans un moteur à explosion). Commenter.

5 • *A.N.* : Déterminer l'altitude H qu'il faut atteindre pour obtenir la période de rotation de 12 heures qui est celle des satellites du système GPS.

6. Stabilité des orbites circulaires

On considère un point matériel M de masse m soumis à une seule force, de la forme $\vec{F} = -\frac{mk}{r^n}\vec{u}_r$ sur la base des coordonnées polaires d'origine O, où k et n sont des constantes positives.

On s'intéresse à une orbite circulaire de rayon r_0, et à une petite perturbation de celle-ci : r varie un peu dans le temps et on peut écrire $r = r_0(1+\varepsilon)$, où $\varepsilon(t) \ll 1$.

a) On note $\vec{OM}$ le vecteur position : obtenir par une étude cinématique l'expression générale du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées temporelles.

b) On pose $C = r^2\dot{\theta}$: démontrer que $\dot{C} = r\,a_\theta$ et donc que C est une constante.

c) Éliminer $\dot{\theta}$ au profit de C et de r dans la RFD projetée sur $\vec{u}_r$.

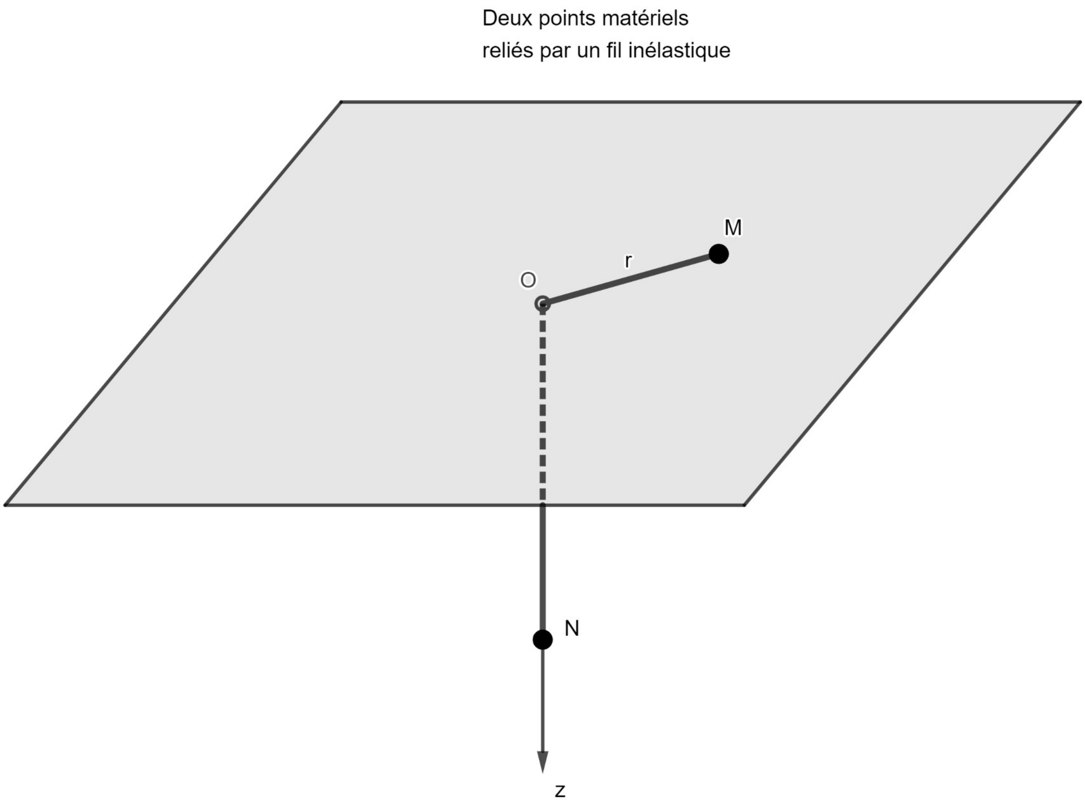
d) Avec l'approximation $\frac{1}{(1+\varepsilon)^m} = (1+\varepsilon)^{-m} \approx 1 - m\varepsilon$, où m est une puissance quelconque, obtenir l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fonction $\varepsilon(t)$, et la présenter correctement.

e) Quand il n'y a pas de perturbation, que vaut ε pour toute date ? En déduire la relation entre C, r_0, n et k.

f) Arranger l'équation. À quelle condition sur n cette équation approchée est-elle harmonique ?

g) Expliquer pourquoi elle doit l'être pour que les orbites circulaires soient stables. Conclure dans le cas de la gravitation.

7. Force centrale non conservative : tension d'un fil



On néglige tout frottement, que ce soit de l'air ou du plan horizontal sur lequel M, de masse m, est contraint de se déplacer.

M est accroché à un fil de longueur constante L avec un autre point matériel N de masse μ. Le fil passe par un trou de dimension négligeable, placé au point O, origine des coordonnées.

On rappelle que la tension du fil a la même norme, notée T, de chaque côté du fil.

Le mouvement du point M est repéré par les coordonnées polaires dans le plan horizontal.

Celui de N est supposé toujours vertical : on repère son mouvement par sa coordonnée z où l'axe z est orienté vers le bas.

a) Justifier que M a un mouvement à force centrale, et en déduire la relation entre $m, C, r, \ddot{r}$ et T, où C est la constante des aires, et T la norme de la tension du fil.

b) Obtenir la relation entre $\mu, g, \ddot{z}$ et T.

c) Prouver que r vérifie l'équation différentielle suivante : $(m+\mu)\ddot{r}-m\dfrac{C^2}{r^3}=-\mu g$

d) On cherche à quelle condition le mouvement de M est circulaire : on note alors le rayon de la trajectoire r_0. Déterminer l'expression de r_0 en fonction de C et d'autres constantes, puis la vitesse angulaire $\omega_0=\dot{\theta}_0$ à donner à M en fonction de r_0 et de constantes pour que ce soit possible.

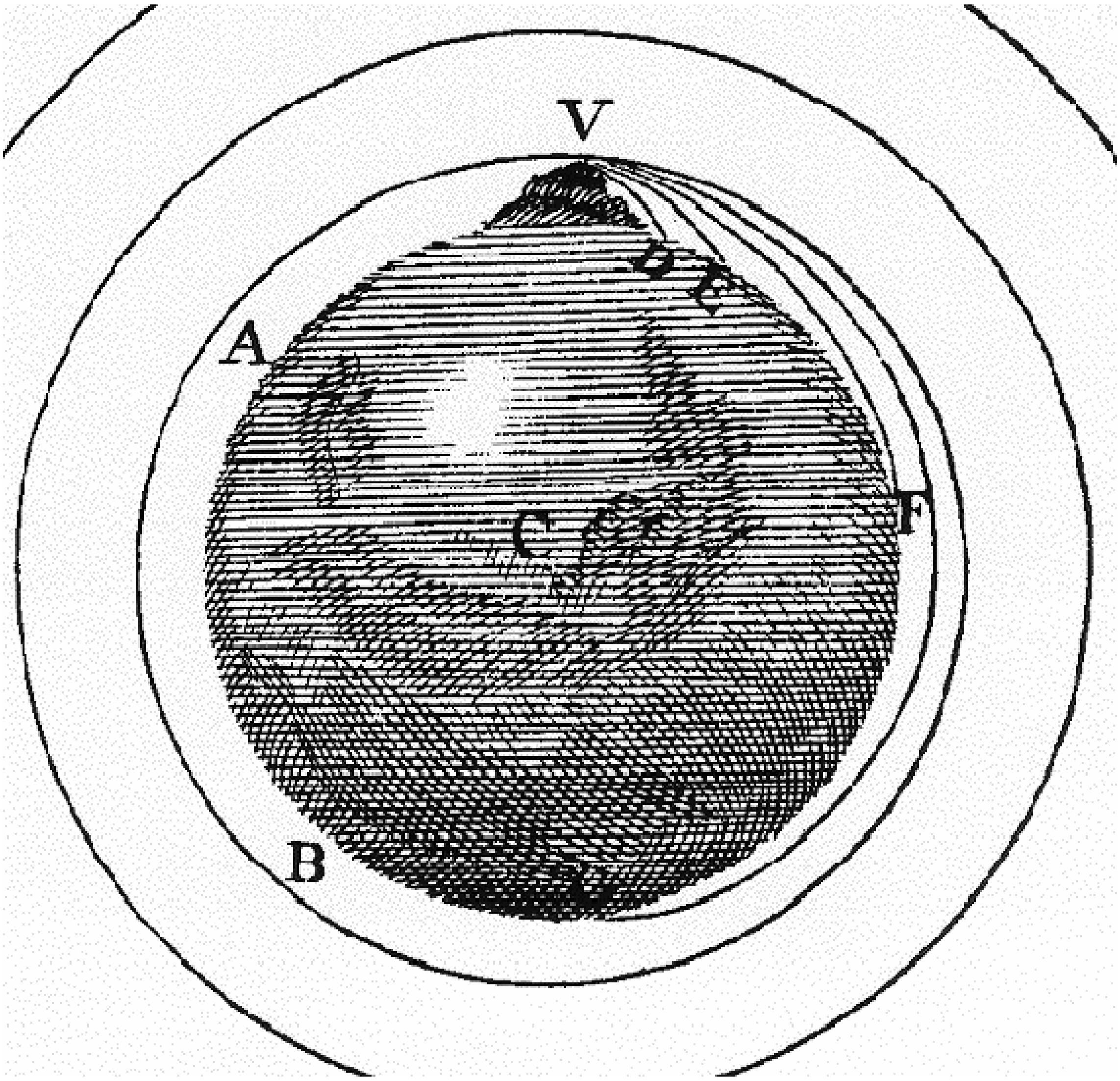
   AN pour $r_0=10\,\text{cm}\,;\, g=10\,\text{m/s}^2\,;\, \mu=4\times m$

e) On lance M avec les mêmes conditions initiales $r_0\,;\dot{\theta}_0$ mais en plus une vitesse initiale radiale $\dot{r}_0$ très petite : on peut écrire $r(t)=r_0(1+\varepsilon(t))$, où $\varepsilon(t)\ll 1$.

   Avec l'approximation $(1+\varepsilon)^{-3}\approx 1-3\varepsilon$, montrer que ε vérifie une équation harmonique homogène dont on donnera la pulsation caractéristique (AN pour la pulsation, puis la période), puis déterminer complètement $r(t)$.

8. Illustration des Principia Mathematica de Newton

Dans son ouvrage sur sa théorie de la gravitation, Isaac Newton inclut le schéma explicatif suivant :



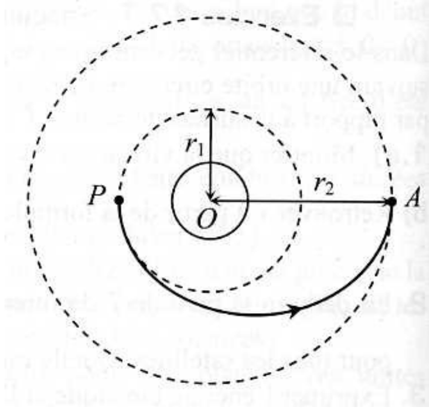
Remarque : Le point B est décalé sur l'illustration, il se trouve aux antipodes (à l'opposé) de V.

a) Expliquer son raisonnement : que cherche-t-il à montrer ?

b) Ce schéma est incomplet :
i. compléter en tirets et avec précision[1] la trajectoire VE, c'est-à-dire celle qui serait suivie si la masse de la Terre était concentrée en C.
ii. poursuivre le raisonnement de Newton : ajouter les trajectoires issues de V qu'il n'a pas représentées.

1 Penser à la direction particulière de la vitesse initiale...

9. Orbite de transfert



Un satellite artificiel, de masse m supposée constante dans tout le problème, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7\ 500\,\text{km}$ autour de la la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42\ 200\,\text{km}$ (orbite géostationnaire).

Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée *P* est à la distance r_1 et l'apogée à la distance r_2 du centre de la Terre; lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.

Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref et on considérera donc que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} au point *P*, puis de v_{e2} à v_2 au point *A*, sans changement de direction.

Données : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{uSI}$ et $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$

(a) Calculer la vitesse v_1

(b) Donner l'expression de l'énergie mécanique sur chacune des trois orbites, en fonction des données.

(c) Comment est modifiée l'énergie potentielle lors de l'allumage du moteur ?

En déduire la vitesse v_{e1} après le premier transfert, et la variation $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$.

(d) En remarquant que, sur l'orbite elliptique, la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur lorsque le satellite se trouve en P ou en *A*, déterminer à l'aide de la constante des aires une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. En déduire v_{e2}.

(e) Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert. Conclure.

10. Comète de Halley

Données astronomiques générales

$1\,\text{ua} = 149{,}6 \cdot 10^6\,\text{km}$, unité astronomique ; $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$, masse du Soleil ;
$1\,\text{an} = 365{,}25\,\text{jours solaires}$ ·

Données concernant la comète de Halley

$T = 76{,}09\,\text{ans}$, période de l'orbite elliptique de la comète ;

$r_P = 0{,}5872\,\text{ua}$, distance de son périhélie au centre su Soleil ;

$v_P = 54{,}5\,\text{km/s}$, vitesse au périhélie dans le référentiel héliocentrique.

Géométrie $A = \pi\, a b$, aire d'une ellipse.

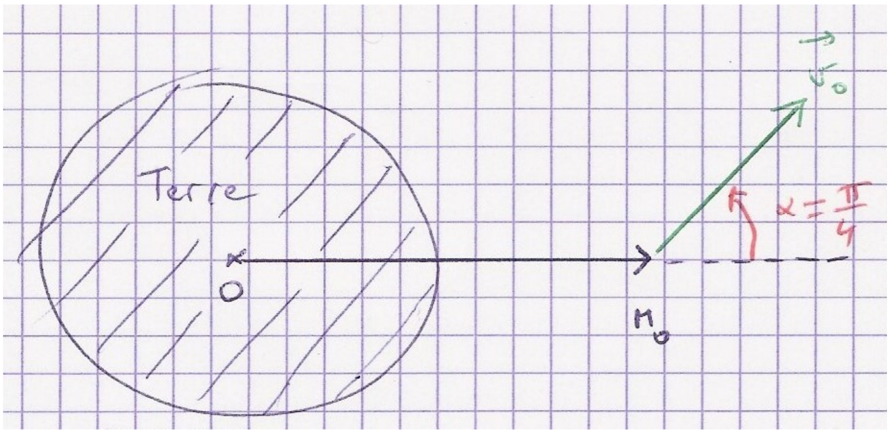
On ignore ici l'influence des astres autres que le Soleil ; de plus, la perte de masse de la comète par vaporisation au voisinage du périhélie est négligée.

a) Obtenir les expressions littérales, puis AN (résultats donnés en unités astronomiques), pour le demi grand axe *a* de l'orbite, et pour la distance de la comète à l'aphélie r_A.

b) Obtenir, puis calculer en unités astronomiques, le demi petit axe *b* de l'orbite.

c) En déduire l'excentricité *e* de l'ellipse, définie par $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$. Que vaudrait l'excentricité d'une orbite circulaire ?

11. Réussir une satellisation



On lance de l'altitude $h = R_T$ un satellite M de masse m, avec une vitesse initiale faisant l'angle π/4 avec $\vec{OM}_0$:

On pose $v_0 = \sqrt{k\, g_0 R_T}$ où k est une constante positive.

a) Déterminer l'énergie mécanique par unité de masse du satellite $e_m = E_m / m$

b) Donner l'expression générale de son énergie potentielle effective par unité de masse $e_{p,eff}$ en fonction de r et des constantes données.

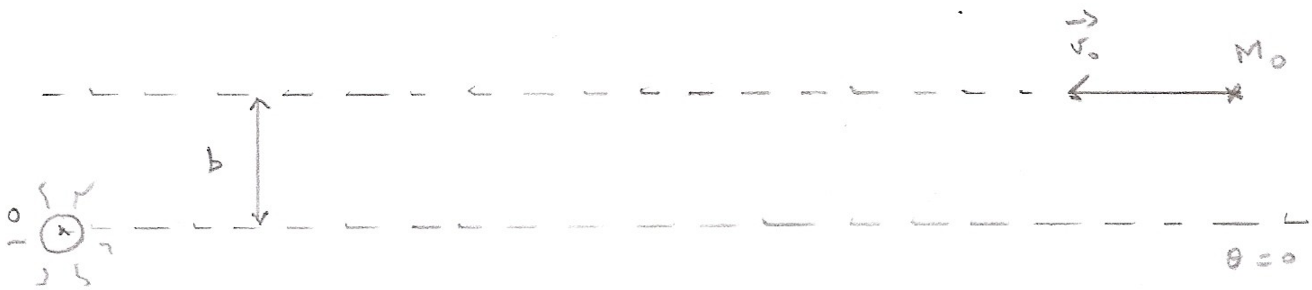
c) En déduire – s'ils existent – les distances au périgée et à l'apogée du mouvement.

d) En déduire l'intervalle des valeurs de k qui aboutissent à une satellisation réussie. On négligera l'influence de l'atmosphère terrestre.

12. Un visiteur spatial

Un petit corps de masse m entre dans le système solaire avec une vitesse $\vec{v}_0$: on supposera que le système solaire ne contient que le Soleil (on néglige donc simplement l'influence des planètes).

M_0 est donc « infiniment loin » du Soleil.



a) Exprimer l'énergie mécanique du corps en fonction des masses et de v_0. En déduire la nature de sa trajectoire.

b) Quelle sera la valeur de sa vitesse limite v_∞ une fois terminée son interaction avec le Soleil ? Compléter le schéma pour représenter l'allure de la trajectoire suivie

c) On note b la distance entre la droite initiale du corps (qui est en MRU) et le Soleil : b est appelé paramètre d'impact.
Pour simplifier, on fixe la référence des angles polaires nuls dans la direction de cette droite : voir le schéma.
Sur le schéma reproduit, marquer l'angle polaire initial θ_0, et démontrer que la constante des aires vaut $C = b\, v_0$.

d) Introduire l'énergie potentielle effective pour obtenir l'expression de la distance au périhélie de la trajectoire r_P . (On néglige bien sûr à tort les effets thermiques du Soleil !!)

AN : Pour $b = 10 R_S$, rayon solaire $R_S = 700.000\,\text{km}$ et $v_0 = 1\,\text{km/s}$. Conclusion ?

13. Erreur de satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse m, sur une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance r_0 du centre de la Terre, et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale (suivant $\vec{e_\theta}$) avec une valeur très précise.

1. Justifier qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Calculer alors la valeur à donner à v pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.

2. En déduire dans ce cas la valeur de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.

3. Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur $\vec{v'}$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\vec{e_\theta}$.

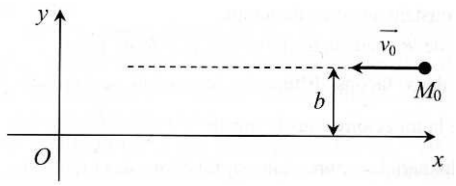
a) Quelles sont alors les valeurs de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?

b) Quelle sera la trajectoire suivie (nature - sans calcul) ?

c) Si on peut tolérer une variation de plus ou moins 2 % de la distance Terre-satellite, quelle est la valeur maximale acceptable pour l'angle α ?

14. Diffusion élastique d'un proton par un noyau

Un proton, assimilé à un point matériel M de masse m et de charge $+e$, est envoyé en direction d'un noyau de charge $+Ze$, immobile à l'origine O des coordonnées d'un repère cartésien $(Oxyz)$. Le référentiel $\Re$ du laboratoire, lié à ce repère, est supposé galiléen.



Le proton se trouve initialement, à la sortie d'un accélérateur, en un point M_0 infiniment éloigné du noyau, dans le plan (Oxy), avec une vitesse $\vec{v_0} = -v_0 \vec{u_x}$. Sa trajectoire est alors rectiligne : on note b la distance entre l'axe (Ox) et cette trajectoire (b est appelé *paramètre d'impact*).

(a) Rappeler la définition de la constante des aires en coordonnées polaires, et l'exprimer en fonction de la coordonnée orthoradiale de la vitesse.
Avec les conditions initiales, démontrer qu'elle vaut $C = b v_0$

(b) Exprimer la force $\vec{F}$ que le noyau exerce sur le proton en fonction de Z, e, ε_0, r et $\vec{u_r}$.

(c) En déduire l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à la force $\vec{F}$, puis l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$ du proton. Tracer l'allure de cette dernière.

(d) Calculer son énergie mécanique en fonction des constantes données.

(e) En déduire, en raisonnant au départ sur un graphique, la distance minimale r_P d'approche du proton. Dessiner l'allure de la trajectoire du proton.