

**À lire avec soin avant de commencer :**

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. On demande d'encadrer les résultats littéraux et de souligner les résultats numériques en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.

De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.

Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision.

La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.

## I – AGRÉGATION INTERNE DE PHYSIQUE 2022 – 14 PTS

## MÉCANIQUE DES FLUIDES CONFINÉS

La machine à force de surface (SFA) est un appareil de mesure de forces de surface qui a été initialement imaginée par D. Tabor, R.H.S. Winterton et J.N. Israelachvili à l'Université de Cambridge. Cet appareil, représenté schématiquement sur la figure 1, permet de mesurer la force qui s'exerce entre deux surfaces (en l'occurrence une sphère de rayon millimétrique et un plan) entre lesquelles est introduit un fluide tout en contrôlant la distance entre celles-ci, à une fraction de nanomètre près. Le SFA offre notamment la possibilité de déterminer de façon fiable et précise les comportements de fluides confinés entre des surfaces séparées de quelques diamètres moléculaires. En mode dynamique, la sphère est excitée, dans la direction normale au plan, par une vibration sinusoïdale de petite amplitude (typiquement 1 nm) appliquée au moyen d'une *céramique piezoélectrique*. Le plan est monté sur un bilame élastique dont la déformation est mesurée grâce à un *capteur optique qui ne sera pas étudié dans ce problème*. La force exercée par le bilame sur le plan est simplement reliée à la déformation du bilame multipliée par sa raideur. Le bilame constitue ainsi un *capteur de force*. Le déplacement relatif entre la sphère et le plan est, quant à lui, mesuré par un *capteur capacitif*.

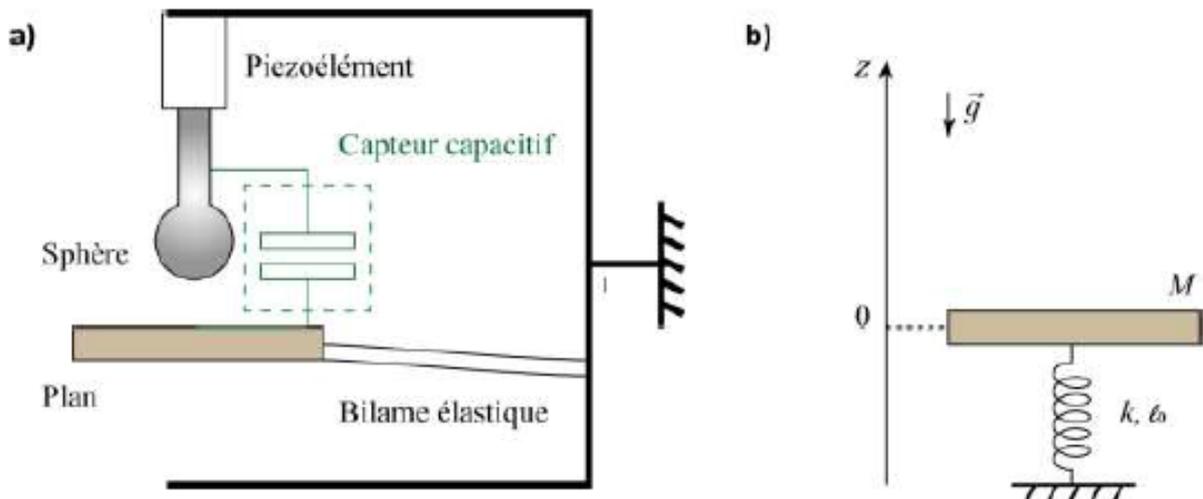


Figure 1: a) Schéma de l'appareil à force de surface dynamique. b) Modèle mécanique du capteur de force.

Dans la partie 1 de ce problème, on étudie le capteur de force.

### 1. Mesure de forces

On peut modéliser le bilame élastique qui sert de capteur de force par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  (figure 1b). On note  $M$  la masse du plan déposé sur le ressort susceptible de se déplacer suivant un axe vertical  $Oz$  orienté par le vecteur unitaire, noté  $\vec{e}_z$ , dirigé vers le haut. Le point  $O$  ( $z=0$ ) est choisi à la position d'équilibre du plan quand la sphère n'exerce aucune force sur le plan. Le déplacement du plan est mesuré grâce à un dispositif optique qui n'est pas étudié dans ce problème. Dans cette partie, le capteur de force est étudié en l'absence de force exercée par la sphère sur le plan.

2. Rappeler ce qu'est un référentiel. Définir « référentiel galiléen ».
3. En l'absence de force exercée par la sphère sur le plan, identifier les forces qui s'appliquent sur le système mécanique constitué par le plan. Pour un plan de masse typique  $M = 30,0$  g et un ressort de raideur typique  $k = 1,00 \cdot 10^3$  N.m<sup>-1</sup>, calculer la valeur de l'enfoncement du ressort à l'équilibre. On prendra  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système constitué par le plan de masse  $M$ , en déduire l'équation différentielle du mouvement reliant la position  $z$  du plan, à ses différentes dérivées temporelles  $\dot{z}$  et  $\ddot{z}$ . Montrer que cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $k$  et  $M$ . À partir des unités de  $k$  et de  $M$ , justifier l'homogénéité de cette relation.

5. Exprimer la solution générale de cette équation. Indiquer combien il faut de conditions initiales pour la déterminer entièrement. On suppose qu'on écarte le plan d'une quantité  $z_0$  et qu'on le lâche avec une vitesse initiale nulle, établir alors l'équation horaire du mouvement.
6. Pour déterminer la valeur de la raideur  $k$ , une technique consiste à rajouter des masselottes de masse  $m$  à la masse  $M$ . On observe que la pulsation propre du système  $M + m$  est désormais  $\omega_1$ . Exprimer  $\omega_1$  en fonction de  $k$ ,  $M$  et  $m$ . Sur la figure 2, on représente les valeurs de  $1/\omega_1^2$  en fonction de  $m$ . Estimer un ordre de grandeur de la valeur de la raideur  $k$  et de la valeur de la masse  $M$  correspondant à ces mesures.

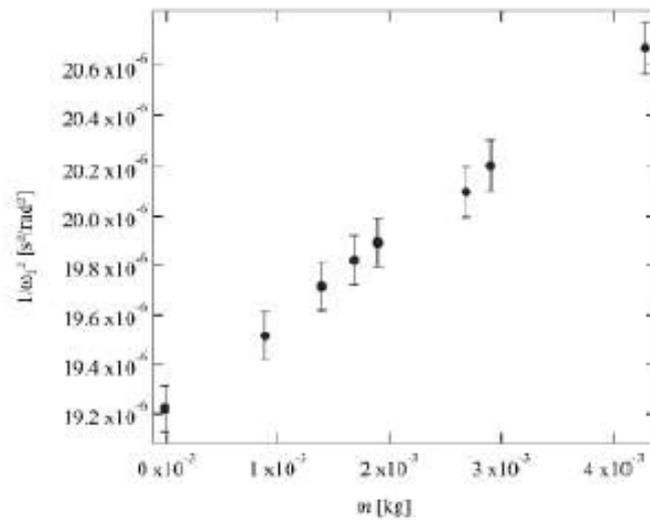


Figure 2:  $1/\omega_1^2$  en fonction de la masse  $m$  ajoutée à la masse  $M$ .

7. On modélise la dissipation dans cet oscillateur par une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse du plan s'écrivant  $\vec{F}_f = -\alpha M \vec{v}$ . Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement.

Dans toute la suite du problème, on supposera que cet amortissement est faible, de sorte que  $\alpha \ll \omega_0$ . On définit le facteur de qualité  $Q$  par :  $Q = \frac{\omega_0}{\alpha} \gg 1$ .

Dans un premier temps, on s'intéresse aux oscillations libres de ce système mécanique oscillant amorti, on montre que la solution approchée de l'équation différentielle obtenue à la question 7 peut se mettre sous la forme :  $z(t) = z_0 e^{-\alpha t/2} \cos(\omega_0 t + \phi)$ .

8. La dissipation d'énergie est traitée comme une perturbation par rapport au cas d'un système non amorti. Compte tenu du choix de l'origine de l'axe  $Oz$ , établir l'expression de la valeur moyenne temporelle de l'énergie mécanique  $\langle \mathcal{E} \rangle$  du système non amorti en fonction de  $k$ ,  $z_0$ ,  $M$  et  $g$ .

On s'intéresse maintenant au régime sinusoïdal forcé où le plan est soumis à une force excitatrice supplémentaire que l'on note en représentation complexe  $\vec{F} = \underline{F}(\omega) \vec{e}_z = F_0 \exp(i\omega t) \vec{e}_z$  avec  $F_0 > 0$ . Le régime transitoire n'est pas pris en compte dans cette description. En pratique cette force est appliquée grâce à un petit aimant de masse négligeable, collé sous le plan, placé en face d'une bobine que l'on fait parcourir par un courant sinusoïdal. Ce système bobine-aimant permet de déterminer la fonction de transfert du SFA.

11. Expliciter la propriété de l'équation du mouvement qui justifie l'utilisation de la notation complexe.
12. Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{z}(\omega)$  des oscillations en fonction de  $F_0$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\alpha$ .

13. On définit la fonction de transfert complexe  $\underline{H}(\omega) = k\underline{z}(\omega) / F_0$ . Préciser l'expression du module  $|\underline{H}(\omega)|$  et de la phase  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\alpha$ .  
(on fera attention à séparer le cas  $\omega < \omega_0$  et  $\omega > \omega_0$ ).

Calculer  $|\underline{H}(0)|$ ,  $|\underline{H}(\omega_0)|$  et  $|\underline{H}(+\infty)|$

14. Sur la figure 3, les expérimentateurs ont choisi de travailler en fréquence plutôt qu'en pulsation et ont tracé le module  $|\underline{H}(f)|$  de  $\underline{H}(f)$  en fonction de la fréquence  $f$ . Estimer l'ordre de grandeur du facteur de qualité à partir de la courbe expérimentale de la figure 3 en s'appuyant sur la question 13.

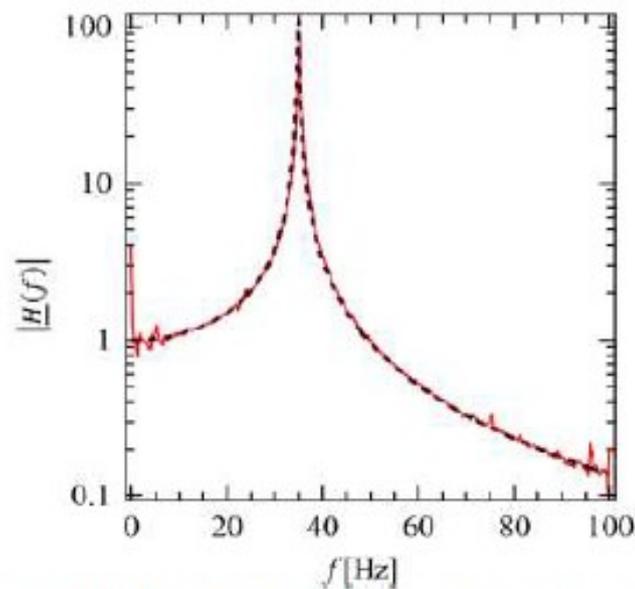


Figure 3: module  $|\underline{H}(f)|$  de  $\underline{H}(f)$  en fonction de la fréquence  $f$ .

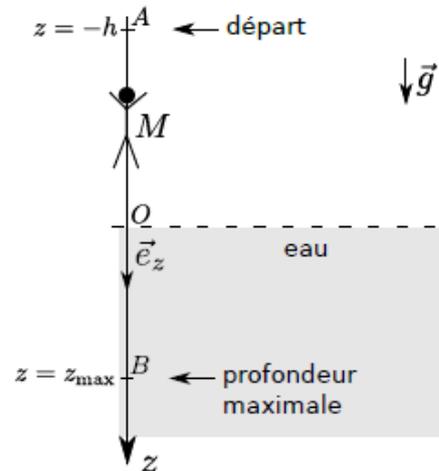
## II – SUJET ATS 2024 – 8,5 PTS

## Étude d'un plongeon

Cette dernière partie étudie le plongeon d'un utilisateur de la piscine.

On utilise les notations de la figure ci-contre et les données suivantes :

- Masse du plongeur  $m = 80 \text{ kg}$ ,  
intensité de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Le mouvement reste selon l'axe  $z$  uniquement.
- Dans l'air, l'énergie potentielle associée au poids s'écrit  $E_p = -mgz$ .



Document 11

## 1 Mouvement dans l'air

On étudie d'abord la partie dans l'air. On néglige tout frottement et le plongeur est soumis uniquement à son poids. Le plongeur saute sans vitesse initiale.

- 45 - Établir l'expression de la vitesse du plongeur lorsqu'il atteint la surface de l'eau en  $z = 0$ .  
On utilisera impérativement une approche énergétique.

Faire l'application numérique pour  $h = 10 \text{ m}$ .

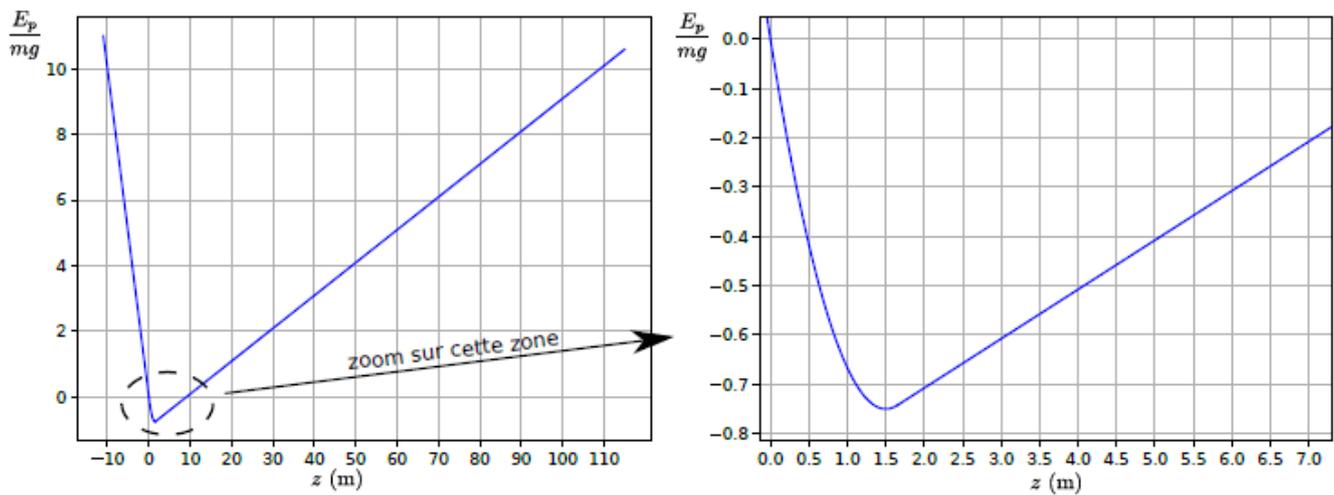
- 46 - Établir l'équation différentielle suivie par la position  $z(t)$  à partir de l'énergie mécanique.  
(Si l'on n'y parvient pas, on procédera à une étude dynamique).

La résoudre afin d'exprimer  $z(t)$ .

- 47 - En déduire l'expression puis la valeur de la durée de la chute en fonction de  $h$  et  $g$ , avant impact dans l'eau.

## 2 Mouvement sous l'eau

Dans un premier temps, on néglige la force de frottement exercée par l'eau sur le plongeur, ainsi que le ralentissement lors de l'impact. On prend en compte uniquement le poids et la poussée d'Archimède de l'eau. Le mouvement est alors conservatif, et l'énergie potentielle associée est tracée sur la figure ci-dessous.



Document 12 : énergie potentielle du plongeur en fonction de sa position  $z$ .

La référence d'énergie est prise en  $z = 0$ . Le graphique de droite est un zoom autour de 0.  $z$  est la position des pieds du plongeur, qui est supposé toujours rester vertical. La taille du plongeur est de 1,65 m.

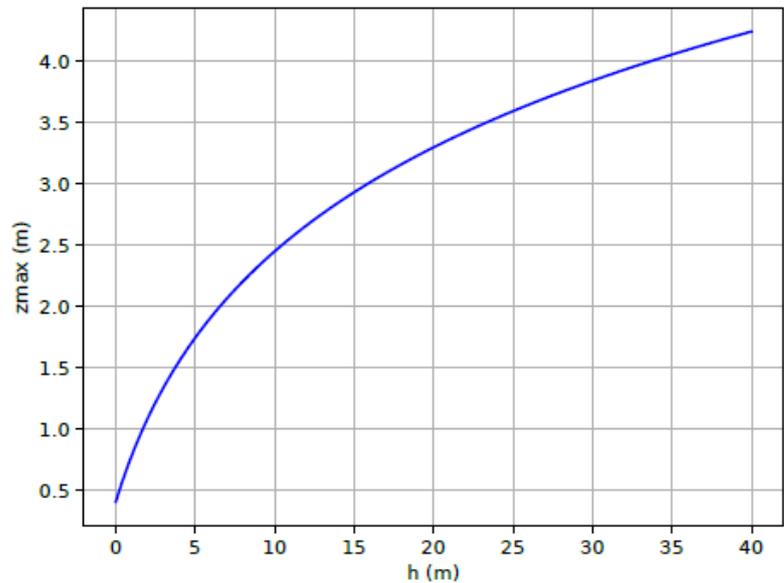
- 48 - Reproduire l'allure du graphique donnant  $E_p(z)$  sur votre copie afin d'indiquer la localisation de la position d'équilibre. À quelle valeur de  $z$  correspond-t-elle ? Est-ce une position d'équilibre stable ?

- 49 - Par une construction graphique, donner la valeur de la profondeur maximale atteinte par le plongeur lorsqu'il saute d'une hauteur initiale de 10 m sans vitesse initiale.

On prend maintenant en compte la force de frottement que l'eau exerce sur le plongeur. Un modèle plus détaillé et non développé ici permet d'obtenir la figure ci-contre, donnant la profondeur maximale atteinte pour une hauteur de plongeur donnée.

On cherche à estimer la valeur moyenne de la force de frottement de l'eau. On note  $\vec{F}$  cette force et  $F > 0$  sa norme, et on la suppose constante au cours du mouvement sous l'eau.

- 50 - Définir le travail de  $\vec{F}$  entre le point  $O$  d'entrée dans l'eau et le point  $B$  où la profondeur maximale est atteinte. L'exprimer en fonction de  $F$  et de  $z_{\max} = z_B$  et commenter son signe.



Document 13 : profondeur maximale atteinte  $z_{\max}$  en fonction de la hauteur de saut  $h$ , lorsque le modèle prend en compte les frottements de l'eau.

Docs. 12 et 13 d'après [www.theses.fr/2014EPXX0055](http://www.theses.fr/2014EPXX0055).

Pour la question suivante, on utilisera le théorème de l'énergie mécanique.

De plus, l'énergie potentielle  $E_p(z)$  à prendre en compte ici est encore celle tracée sur le document 12.

- 51 - En exploitant notamment les documents 12 et 13, estimer la valeur de la force  $F$  pour un plongeur de hauteur initiale  $h = 10$  m.

**FIN**