# I – Agrégation interne de physique 2022

**Q2.** Un référentiel est un solide de référence par rapport auquel on étudie les mouvements. Un référentiel est dit galiléen lorsque le principe d'inertie est vérifié pour tout mobile (le MRU est obtenu si et seulement si la somme des forces est nulle).

**Q3.** Les forces qui s'appliquent sur le système « plan » sont son poids $\vec{P}=M\vec{g}$ et la force de rappel élastique exercée par le ressort linéaire $\vec{F}_{\text{él}}=-k(l-l_0)\vec{u}_{R\to M}$.

On a ici $\vec{u}_{R\to M}=+\vec{e}_z$

Contrainte = équilibre, donc la RFD s'écrit $\vec{P}+\vec{F}_{\text{él}}=\vec{0}$, ce qui donne sur l'axe $z$ du mouvement $-Mg-k(l_{\text{éq}}-l_0)=0$, d'où l'allongement de ressort à l'équilibre $l_{\text{éq}}-l_0=-\dfrac{Mg}{k}$, négatif bien sûr : le ressort s'« enfonce » de $\dfrac{Mg}{k}=30{,}0\times10^{-3}\times10\times10^{-3}\,\text{m}=300\,\mu\text{m}=0{,}300\,\text{mm}$.

**Q4.** <u>Très important</u> : on fait un schéma hors équilibre avec le paramètre $z$ du mouvement **positif**, ce qui donne par lecture du schéma la relation $l=l_{\text{éq}}+z$.

La RFD devient $\vec{P}+\vec{F}_{\text{él}}=M\vec{a}$, donc sur $z$ : $-Mg-k(l-l_0)=M\ddot{z}$, c'est-à-dire $-Mg-k(l_{\text{éq}}-l_0)-kz=M\ddot{z}$, où la somme des deux premiers termes est nulle d'après la Q3.

Il reste donc l'ED $M\ddot{z}+kz=0$ soit $\ddot{z}+\omega_0^2 z=0$ avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

L'unité de $k$ est le N/m, avec la loi permettant d'obtenir l'unité SI des newtons : $\vec{P}=M\vec{g}$ par exemple, ce qui donne $1\,\text{N}=1\,\text{kg.m/s}^2$, donc l'unité de $k$ est le $\text{kg/s}^2$. On obtient alors que $\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ s'exprime en $\text{s}^{-1}$, ce qui est cohérent avec l'unité d'une pulsation, le rad/s, puisque les radians sont une unité sans dimension (rapport de la longueur de l'arc sur le rayon du cercle).

**Q5.** On a alors $z=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, où $A$ et $B$ sont 2 constantes d'intégration quelconques : il faut donc 2 conditions initiales, de position (valeur) et de vitesse (dérivée initiale) pour obtenir la solution complètement déterminée.

CI de valeur : $z(0)=A\cos 0+B\sin 0=z_0$, donc $A=z_0$.

CI de dérivée : $\bar{v}(0)=\dot{z}(0)=-A\omega_0\sin 0+B\omega_0\cos 0=0$, donc $B\omega_0=0$, puis $B=0$.

Finalement $z=z_0\cos(\omega_0 t)$.

**Q6.** On a sans aucun calcul $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$, donc $\dfrac{1}{\omega_1^2}=\dfrac{M+m}{k}=\dfrac{M}{k}+\dfrac{1}{k}m$, fonction affine (ordonnée à l'origine + pente x m).

Il faut tracer la meilleure droite. On lit alors $\dfrac{M}{k}=19{,}2\cdot10^{-6}\,\text{s}^2$ et $\dfrac{1}{k}=\dfrac{(20{,}6-19{,}2)\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-3}}=0{,}35\cdot10^{-3}\,\text{m/N}$, donc $k=2{,}9\cdot10^3\,\text{N/m}$, puis $M=19{,}2\cdot10^{-6}\,\text{s}^2\times k=55\,\text{g}$.

**Q7.** On ajoute cette nouvelle force à la RFD, ce qui donne immédiatement l'ED : $\ddot{z}+\alpha\dot{z}+\omega_0^2 z=0$.

**Q8.** On a par définition $E_m=E_c+E_{pp}+E_{p,\text{él}}=\dfrac{1}{2}Mv^2+Mgz+\dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2$, avec $v=\dot{z}=-z_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$.

On en déduit que $\langle E_m\rangle=\dfrac{1}{2}Mz_0^2\omega_0^2\langle\sin^2(\omega_0 t)\rangle+Mg\langle z\rangle+\dfrac{1}{2}k\langle(l_{\text{éq}}-l_0+z)^2\rangle$ donc

$\langle E_m\rangle=\dfrac{1}{2}Mz_0^2\omega_0^2\times\dfrac{1}{2}+Mg\times0+\dfrac{1}{2}k(l_{\text{éq}}-l_0)^2+0+\dfrac{1}{2}k\langle z^2\rangle$ car la moyenne temporelle d'une sinusoïde est nulle, et la moyenne de son carré vaut 1/2 (le double produit est donc de moyenne nulle).

Il reste $\langle E_m\rangle=\dfrac{1}{4}Mz_0^2\omega_0^2+\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{Mg}{k}\right)^2+\dfrac{1}{4}kz_0^2$, et puisque $\omega_0^2=\dfrac{k}{M}$ : $\langle E_m\rangle=\dfrac{1}{2}kz_0^2+\dfrac{M^2g^2}{2k}$

**Q11.** On obtient très simplement l'ED : $\ddot{z}+\alpha\dot{z}+\omega_0^2 z=\frac{F}{M}=\frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$ . C'est une ED linéaire avec un second membre sinusoïdal, il faut donc passer en complexe pour la résoudre.

**Q12.** On a alors d'après la notation de l'amplitude complexe (pas très judicieuse : une majuscule s'imposait), $\underline{z}(t)=\underline{z}(\omega)\exp(i\omega t)$ , la phase étant incluse dans l'amplitude complexe. En effet, la SP correspondant au régime **établi** sinusoïdal forcé est de même pulsation que l'excitation.

Avec la règle bien connue de dérivation temporelle dans $\mathbb{C}$ , on obtient $(i\omega)^2\underline{z}(\omega)\exp(i\omega t)+\alpha i\omega\underline{z}(\omega)\exp(i\omega t)+\omega_0^2\underline{z}(\omega)\exp(i\omega t)=\frac{F_0}{M}\exp(i\omega t)$ , donc $\underline{z}(\omega)=\frac{F_0}{M}\frac{1}{-\omega^2+i\alpha\omega+\omega_0^2}$ , une exponentielle complexe n'étant jamais nulle.

**Q13.** On en déduit $\underline{H}(\omega)=\frac{k}{F_0}\times\frac{F_0}{M}\frac{1}{-\omega^2+i\alpha\omega+\omega_0^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+i\alpha\omega}$ , d'où le module $|\underline{H}(\omega)|=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}}$ .

Pour la phase, on a $\varphi(\omega)=\mathrm{Arg}(\underline{H}(\omega))=0-\mathrm{Arg}(\omega_0^2-\omega^2+i\alpha\omega)$ , où il faut être prudent car la partie réelle du complexe n'est pas forcément positive.

Si $\omega<\omega_0$ , aucun problème : $\varphi(\omega)\equiv-\mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\ [2\pi]$ .

Si $\omega>\omega_0$ , le plus simple est de s'arranger pour avoir une partie réelle positive : $\varphi(\omega)=\mathrm{Arg}\left(\frac{-\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2-i\alpha\omega}\right)$ , donc $\varphi(\omega)\equiv\pi-\mathrm{Arctan}\left(\frac{-\alpha\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\ [2\pi]$ soit $\varphi(\omega)\equiv\pi-\mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\ [2\pi]$ .

(On pourrait chercher à savoir si c'est $\pm\pi$ par continuité de la fonction en $\omega_0$ , mais ce n'est pas demandé).

On a de façon évidente $|\underline{H}(0)|=1$ , puis $|\underline{H}(\omega_0)|=\frac{\omega_0^2}{\alpha\omega_0}=\frac{\omega_0}{\alpha}=Q$ , et $\underline{H}(\omega)\sim_{+\infty}\frac{\omega_0^2}{-\omega^2}$ , qui tend donc vers 0 quand $\omega\to+\infty$ .

**Q14.** Il faut se souvenir que pour les facteurs de qualité élevés, le maximum de la courbe, à la pulsation ou à la fréquence de résonance (selon l'abscisse choisie), est très proche de la pulsation – ou fréquence, propres.

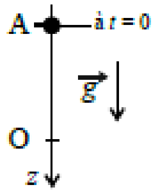
On lit que $|\underline{H}(f_0)|=100$ , donc d'après ce qui précède, on a $Q=100$ , ce qui est effectivement une valeur élevée pour un facteur de qualité.

Rappel d'une interprétation de Q : on observe alors en régime libre une centaine d'oscillations amorties avant le retour au régime permanent.

# II – Sujet ATS 2024

## IV Étude d'un plongeon

### IV.1 Mouvement dans l'air




45 - J'étudie la bille dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Son énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$

Je vais utiliser le théorème de l'énergie mécanique : $E_m(\mathrm{O}) - E_m(\mathrm{A}) = W^{nc}$

$W^{nc} = 0$ car il n'y a pas de frottement $\Rightarrow$ Le système est conservatif.

| | | | |
|---|---|---|---|
| En A | $z_A = -h$ | $v_A = 0$ | $E_m(\mathrm{A}) = mgh$ |
| En O | $z_O = 0$ | $v_O$ | $E_m(\mathrm{O}) = \frac{1}{2}mv_O^2$ |

$E_m(\mathrm{A}) = E_m(\mathrm{O}) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_O^2 \Rightarrow \boxed{v_O = \sqrt{2gh}}$ $v_O = \sqrt{2\times 9{,}8\times 10} = \sqrt{196}$ $\boxed{v_O = 14\ \mathrm{m.s^{-1}}}$

46 - L'énergie mécanique à un instant quelconque est $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2(t) - mgz(t)$

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P^{nc}$ et $P^{nc} = 0$ car il n'y a pas de frottement.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}2\cancel{\dot{z}}\ddot{z} - \cancel{m}g\cancel{\dot{z}} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{z}(t) = g}$ est l'équation différentielle

En intégrant l'équation différentielle $\ddot{z}(t) = g$ par rapport au temps, $\dot{z}(t) = gt + C_1$

Je calcule la Constante d'Intégration avec la Condition Initiale $\dot{z}(0) = 0$

$0 = g\times 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$ L'équation horaire de la vitesse est donc $\dot{z}(t) = gt$

En intégrant $\dot{z}(t) = gt$ par rapport au temps, $z(t) = \frac{g}{2}t^2 + C_2$

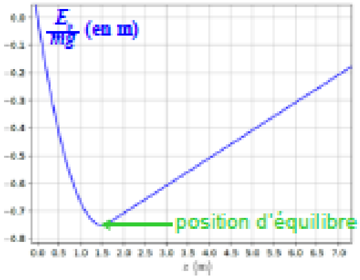
Je calcule la Constante d'Intégration avec la Condition Initiale $z(0) = -h$

$-h = \frac{g}{2}0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -h$ L'équation horaire de la position est donc $\boxed{z(t) = \frac{g}{2}t^2 - h}$

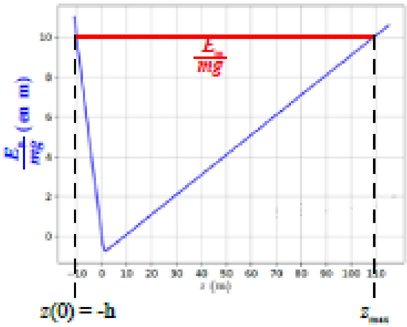
47 - À la fin de la chute, $z(t_c) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{g}{2}t_c^2 - h \Rightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

$t_c = \sqrt{\frac{2\times 10}{9{,}8}} \approx \sqrt{2}$ $\boxed{t_c \approx 1{,}4\ \mathrm{s}}$

### IV.2 Mouvement sous l'eau




**48 -** Le minimum d'énergie potentielle (puit de potentiel) pour $z_{éq} = 1{,}5$ m correspond à une position d'équilibre stable. C'est le plongeur qui flotte à la surface de l'eau en dépassant de 15 cm.



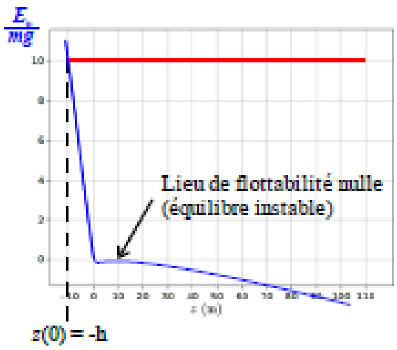

**49 -** En l'absence de frottement, l'énergie mécanique reste constante. Pour tout z,

$$E_p(z) = E_m - \frac{1}{2}mv^2 \le E_m \text{ donc } \frac{E_p(z)}{mg} \le \frac{E_m}{mg}$$

Le mouvement est piégé dans une cuvette de potentiel.
Par lecture, $z_{max} = 110$ m

Ce résultat n'est pas raisonnable. Il manque deux ingrédients à cette modélisation :

- La viscosité de l'eau ; l'énergie mécanique diminue lors du mouvement.
- La compression du corps du plongeur qui augmente la densité de son corps avec la profondeur.




Voici l'allure de la véritable courbe de l'énergie potentielle du poids et de la poussée d'Archimède pour un homme de 80 kg, 1m65.

On appelle flottabilité la poussée d'Archimède diminuée du poids.

À faible profondeur, la flottabilité est positive.

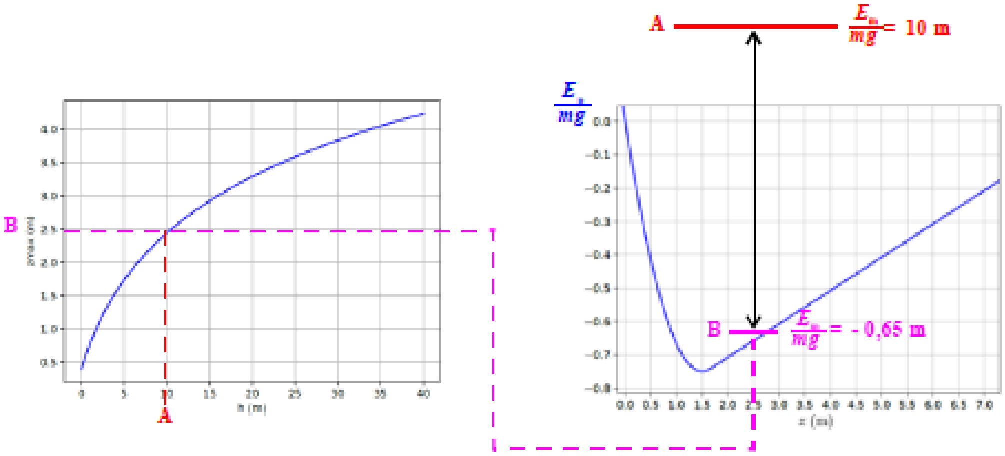
Avec la pression, les 6 litres d'air dans ses poumons se compriment diminuant la poussée d'Archimède et il y a une profondeur où la flottabilité est nulle (moins de 10 m pour notre plongeur sans lest et sans combinaison).

Passé cette profondeur, le plongeur « coule ».

**50 -** $W = \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_O^B \left(-F\,\vec{e}_z\right)\cdot\left(dz\,\vec{e}_z\right) = -F\int_0^{z_{max}} dz$ $\boxed{W = -Fz_{max} < 0}$ travail d'une force résistante

**51 -** Théorème de l'énergie mécanique entre deux points A et B où il n'y a pas d'énergie cinétique.
Je fais l'hypothèse que le seul travail de force non conservative est celui de $\vec{F}$.

$W = E_m(B) - E_m(A) = (-0{,}65 - 10)\times 80\times 9{,}8 \approx -8\,350$ J $\quad F = \frac{-W}{z_{max}} = \frac{8\,350}{2{,}5}$ $\boxed{F \approx 3\,340 \text{ N}}$




8