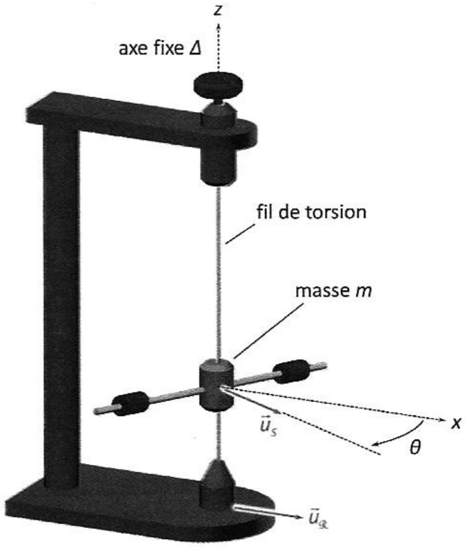
TD 18 – ROTATION DU SOLIDE

1. Étude d'un pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué par une barre horizontale suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique dont l'extrémité supérieure est reliée à un support fixe. La barre peut donc tourner autour de l'axe Oz matérialisé par le fil. On oriente cet axe vers le haut.



Le fil exerce exerce sur la barre un couple de rappel dont le moment par rapport à Oz est $-C\theta$ où θ est l'angle de torsion et C la constante de raideur du fil.

On ajoute à la barre deux surcharges identiques, de masse $m=50\,\mathrm{g}$ chacune, que l'on place symétriquement par rapport à O. La distance, constante mais réglable, entre les masses et O est notée d.

Le moment d'inertie de la barre seule est J_0, celui de l'ensemble {barre+masses} est noté J.

On fait l'hypothèse qu'il n'y a aucun frottement.

(a) Justifier que $J=J_0+2md^2$.

(b) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par θ.

(c) On mesure la période des oscillations pour différentes valeurs de la distance d. Les résultats sont présentés ci-dessous :

d (cm)	10,0	15,0	18,0
T_0 (s)	10,8	13,3	15,1

i. En déduire la valeur de C et de J_0.

ii. La constante de raideur est donnée par $C=\mu\dfrac{\pi\delta^4}{32\ell}$ où μ est une caractéristique du matériau constituant le fil, δ son diamètre et ℓ sa longueur.

Sachant que le fil est en argent, avec $\ell=0{,}5\,\mathrm{m}$ et $\delta=0{,}5\,\mathrm{mm}$, calculer μ pour l'argent et préciser son unité SI.

2. Toupie

Une petite toupie assimilable à un disque homogène de masse m = 100g, de rayon R = 5 cm, tournant autour de son axe de révolution, est initialement lancé à une vitesse angulaire de 3600 tour par minute. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution (axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan) est $J = mR^2/2$.

Sachant que la toupie s'arrête au bout de 3 minutes sous l'action de frottements équivalents à un couple que l'on supposera de moment constant, calculer :

1) Le moment du couple.
2) L'accélération angulaire au cours du mouvement.
3) Le nombre de tours effectués jusqu'à l'arrêt total de la toupie.

3. Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur $L=30\,\text{m}$ et de masse m.

L'arbre est scié à sa base et bascule en tournant autour de son point d'appui ; on suppose qu'il ne glisse pas.

On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t=0$, l'arbre fait un angle $\theta_0=5°$ avec la verticale et est immobile.

On donne son moment d'inertie par rapport à son extrémité $J=\frac{1}{3}mL^2$. L'intensité de la pesanteur est $g=10\,\text{m/s}^2$.

(a) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'arbre en omettant les frottements.

(b) En multipliant cette équation par $\dot{\theta}$ et en intégrant, montrer que sa vitesse angulaire vaut :

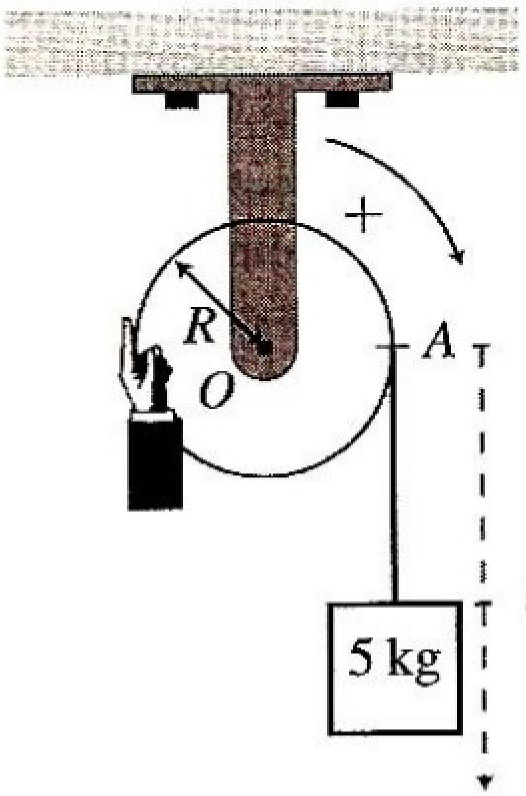
$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0-\cos\theta\right)}$$

(c) Retrouver ce résultat en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

(d) Réécrire cette relation sous la forme $\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}=\dots$

En déduire la durée de la chute de l'arbre, sachant que $\int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}=5{,}1$

4. Étude d'une poulie



Une masse $m=5{,}0\,\text{kg}$ est suspendue à l'extrémité d'une corde sans masse enroulée sur une poulie de masse $m_P=1{,}0\,\text{kg}$ et de rayon $R=10\,\text{cm}$ en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. La corde ne glisse pas sur la poulie.
On donne l'intensité de la pesanteur $g=10\,\text{m/s}^2$.

Le moment d'inertie de la poulie est $J=\frac{1}{2}m_P R^2$.

(a) Aspect cinématique

On suppose connue la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la poulie. Sachant que la corde ne glisse pas, en déduire la vitesse $\dot{x}$ de la masse m. (cf schéma : axe x vers le bas et sens horaire positif)

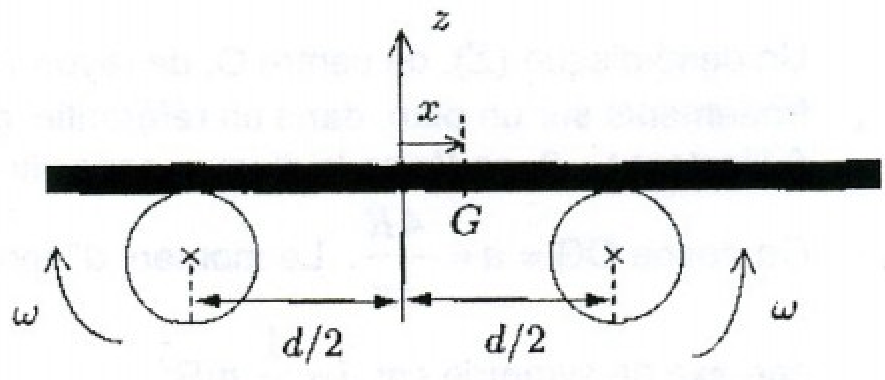
(b) Aspect statique

La poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?

(c) Aspect dynamique

L'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie, l'accélération linéaire de la masse et la tension de la corde.

5. Expérience de Timochenko



Deux cylindres de rayon R tournent autour de leurs axes respectifs à même la vitesse angulaire ω constante, en sens inverse. Une barre de longueur suffisamment grande pour que le contact existe toujours est posée sur les cylindres.

On admet qu'il y a toujours glissement entre les cylindres et la barre, et on note f le coefficient de frottement dynamique des deux matériaux composant la barre et les cylindres.

L'épaisseur de la barre est négligeable.

On notera avec un indice « 1 » les forces exercées par le cylindres de gauche sur la barre, et un indice « 2 » celles exercées par celui de droite.

(a) Dans quel sens le cylindre de gauche a-t-il tendance à faire se déplacer la barre ?

Placer les forces exercées sur la barre : $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$, en respectant leur sens et leur point d'application.

(b) En appliquant deux fois le TMC_Δ respectivement au point de contact de chaque cylindre avec la barre, l'axe Δ pointant de la figure, obtenir les expressions de $\vec{N}_1$ et de $\vec{N}_2$ en fonction de *m, g, d* et *x*.

On remarquera, lors de l'application du théorème, que la barre ne tourne pas.

(c) En appliquant maintenant la RFD :

i. vérifier que les expressions obtenues pour les réactions normales sont cohérentes ;

ii. montrer que le centre de gravité de la barre est en mouvement sinusoïdal.

(d) L'expérience de Timochenko vise à déterminer expérimentalement la valeur du coefficient de frottement dynamique *f* entre deux matériaux.

Obtenir l'expression de *f* en fonction des constantes et d'une grandeur aisément mesurable expérimentalement.

6. Système Terre – Lune

Le moment d'inertie de la Terre, en rotation uniforme autour de l'axe de ses pôles vaut $J_T = 0{,}33\, M_T R_T^2$, avec $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

On peut considérer que la Lune est en rotation autour de ce même axe puisqu'elle fait toujours face à la Terre. $D = 384.000\,\mathrm{km}$ est sa distance au centre de la Terre, donc à cet axe.

La Lune est suffisamment petite et distante pour être assimilée à un point matériel. On donne sa masse $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$.

La vitesse de la Lune sur son orbite est donnée par $v_L = \sqrt{\dfrac{\mathrm{G} M_T}{D}}$ avec $\mathrm{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{uSI}$.

(a) Calculer le moment d'inertie J_T de la Terre, puis son moment cinétique $L_{T\Delta}$ autour de l'axe des pôles.

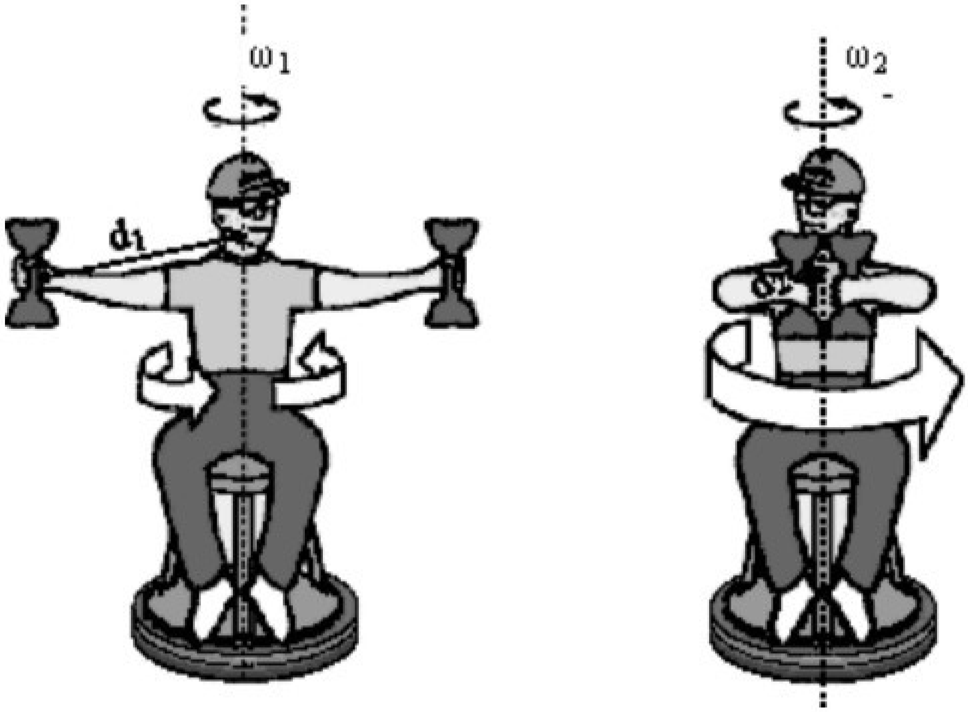
(b) Calculer le moment cinétique $L_{L\Delta}$ de la Lune autour de ce même axe.

(c) Le moment cinétique total du système Terre-Lune se conserve, mais à cause du phénomène des marées, il y a échange de moment cinétique entre la Terre et la Lune.

Des mesures sur le terrain (espacement entre les cernes de croissance des coraux fossiles) prouvent qu'il y a 100 millions d'années, au jurassique, le jour durait 23h00.

En déduire la distance Terre-Lune à cette époque, qu'on notera D'.

7. Système déformable : tabouret d'inertie



On considère un corps déformable, non solide.

On va prouver que le théorème du moment cinétique reste valable, puis étudier une application : le tabouret d'inertie.

A/ Théorie

On considère un point M_i du corps, de masse m_i, à la distance r_i de l'axe, **variable** puisque le corps est déformable.

1. Prouver (voir le cours) que $\frac{d L_\Delta(M_i)}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{/M_i})$, où $L_\Delta(M_i) = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i$ est le moment cinétique de M_i.

2. On définit le moment cinétique du corps par sommation $L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i)$

   En déduire que le TMC reste valable pour un système déformable.

3. On définit le moment d'inertie également par sommation $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$.

   À quelle condition y a-t-il une relation simple entre L_Δ et J_Δ ?

B/ Tabouret d'inertie (voir figure en début de problème)

Un homme tient 2 haltères à bout de bras ; il est assis sur un tabouret, et l'ensemble de moment d'inertie J_1 tourne à la vitesse angulaire ω_1 .

Pendant la rotation, l'homme rapproche simultanément les 2 haltères et ses bras de l'axe de rotation, sans que leur altitude change.

À la fin, la vitesse angulaire est ω_2 , et on note le moment d'inertie du système J_2 .

4. On néglige tous les frottements : en déduire que le moment cinétique du système complet (homme + haltères + tabouret) reste constant.
5. Donner son expression à l'état initial, ainsi qu'à l'état final, en fonction des grandeurs introduites ci-dessus, et justifier qu'on a nécessairement $\omega_2 > \omega_1$.
6. Exprimer le rapport des énergies mécaniques entre l'état initial et l'état final $\frac{E_{m,2}}{E_{m,1}}$ en fonction du rapport des moments d'inertie.
7. En déduire le signe de sa variation ΔE_m , et expliquer physiquement son origine en appliquant le TEM.

   Calculer ΔE_m en fonction de J_1, ω_1, ω_2 seulement ; on simplifiera l'expression le plus possible.

8. Étude d'un embrayage

Un embrayage est modélisé par deux disques de moments d'inertie respectifs J_1 et J_2 par rapport à leur axe de rotation commun Δ. On les étudie en l'absence de tout moment extérieur, le premier étant lancé à la vitesse angulaire Ω tandis que le second est immobile. La mise en contact entre les surfaces des disques conduit à un couple de frottement qui disparait quand leurs vitesses angulaires sont égales à ω, figure 9.

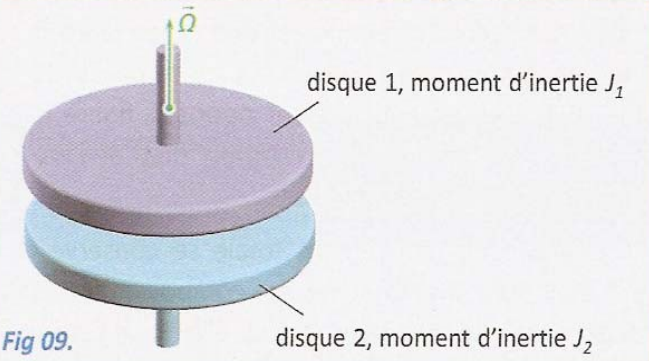
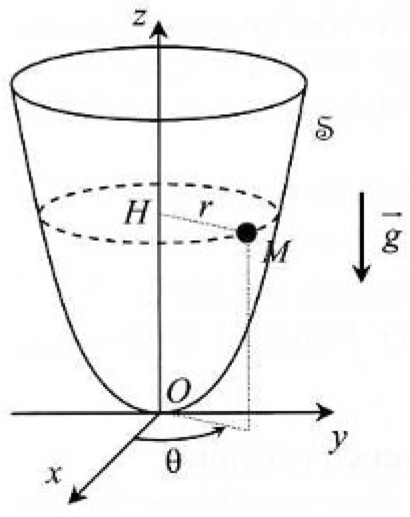


Fig 09.

1. Exprimer la vitesse angulaire finale ω.
2. Calculer le travail du couple de frottement pendant la phase de couplage des disques. Dépend-il du type de frottement mis en jeu ?

9. Bille sur une cuvette parabolique



Une petite bille de masse *m* peut rouler sur une surface *S* fixe par rapport au référentiel terrestre $\Re$ considéré comme galiléen. Cette surface est un paraboloïde de révolution, d'axe vertical ascendant (Oz), et décrit par l'équation $z=\frac{r^2}{a}$ en coordonnées cylindriques.

On modélise la bille comme un point matériel *M* se déplaçant sans frottement sur la surface : la réaction normale $\vec{R}$ exercée par *S* sur *M* est alors contenue dans le plan méridien (OHM).

(a) Constante *L* du mouvement

Écrire la RFD orthoradiale pour M.
En déduire que $L=mr^2\dot{\theta}$ se conserve.

(b) Énergie

i. Exprimer l'énergie cinétique E_C de *M* en fonction des variables *r* et θ et leurs dérivées.

ii. Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_P pour *M*, et l'exprimer en fonction de *r* uniquement.

iii. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de *M* ?

(c) Discussion générale du mouvement

i. Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme
$\frac{1}{2}m\dot{r}^2G(r)+E_{P,eff}(r)=E_M$
où $G(r)$ est positif et sans dimension, et où $E_{P,eff}(r)$ est une énergie potentielle effective.
Expliciter les expressions de $G(r)$ et $E_{P,eff}(r)$ en fonction de r, a, L, m et *g*.

ii. Représenter le graphe de $E_{P,eff}(r)$

iii. Discuter, à l'aide de ce graphe, la nature du mouvement de *M*. En déduire que la trajectoire de *M* est nécessairement tracée sur une région de *S* limitée par deux cercles, définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

D'après Concours commun polytechnique