A – D'APRÈS CENTRALE PC PHYSIQUE 1 2013

II.B – Le champ électrostatique étant uniforme, sa relation avec la tension (différence de potentiel) est donc $E_0=\frac{U}{d}$. Par identification $\alpha=\frac{eU}{md}$.

II.C – Comme on cherche la durée du parcours, l'approche énergétique ne suffira pas, il faut utiliser la RFD. (Obtenir v_1 d'abord, puis en déduire T ne sera pas très convaincant…)

Le référentiel est celui du laboratoire, galiléen, le système est l'électron de charge $-e$, le poids est négligé, donc le mouvement est unidimensionnel selon l'axe x.

On en déduit immédiatement avec la force électrique sur l'électron, la RFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt}=-e\vec{E}_0$, puis sa projection $m\frac{dv_x}{dt}=+eE_0$ et ensuite $\frac{dv_x}{dt}=\alpha$, qu'on intègre bien sûr deux fois.

Avec la condition initiale sur la vitesse (égalisation des primitives avec constante à identifier par exemple), on déduit $v=v_x=v_0+\alpha t$ soit $v_1=v_0+\alpha T$.

Attention, il faut l'expression générale de $v(t)$ pour pouvoir intégrer une seconde fois.

Cela donne $x=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2+\text{cte}$, la constante valant 0 avec la condition initiale sur l'abscisse.

On en déduit $d=v_0T+\frac{1}{2}\alpha T^2$, équation du second degré qu'il faut résoudre pour déterminer la durée T :

$\frac{1}{2}\alpha T^2+v_0T-d=0$, de discriminant $v_0^2+2\alpha d$. Mathématiquement, on trouve $T=\frac{1}{\alpha}\left[-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2\alpha d}\right]$, mais (et c'est classique), on ne conserve ici que la solution positive, donc $\boxed{T=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{v_0^2+2\alpha d}-v_0\right]}$.

On remplace pour obtenir la vitesse finale $\boxed{v_1=\sqrt{v_0^2+2\alpha d}}$.

II.D – Appliquons le TEM entre l'état initial et final, avec l'énergie « mécanique » de l'électron de charge $-e$: $E_m=E_C+E_{p,él}=\frac{1}{2}mv^2-eV$.

$\Delta E_m=W_{NC}$ où ici le travail non conservatif est dû à la perte d'énergie par rayonnement de l'électron.

On identifie la norme de l'accélération a avec la constante α (question II.C : RFD projetée sur x), donc d'après la formule de Larmor : $P=m\tau\alpha^2$, qui est une constante.

Puisqu'elle correspond à une énergie mécanique perdue par unité de temps, et puisqu'on suppose la durée du parcours inchangée, on déduit $W_{NC}=-PT$.

Donc $\frac{1}{2}mv'^2_1-eV_d=\frac{1}{2}mv_0^2-eV_0-PT$ soit $\frac{1}{2}mv'^2_1=\frac{1}{2}mv_0^2+eU-PT$.

La vitesse v_1 vérifiait cette équation, mais sans l'effet de la puissance rayonnée : $\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_0^2+eU$.

On cherche la relation entre ces 2 vitesses, soit : $\frac{1}{2}mv'^2_1=\frac{1}{2}mv_1^2-PT$ ou encore $v'^2_1=v_1^2-2\tau\alpha^2T$ donc $v'_1=\sqrt{v_1^2-2\tau\alpha^2T}$.

L'influence du rayonnement étant très petite, on fait un DL d'ordre 1, qui n'est simple qu'au voisinage de 1, donc $v'_1=v_1\sqrt{1-2\frac{\tau\alpha^2T}{v_1^2}}=v_1\left(1-2\frac{\tau\alpha^2T}{v_1^2}\right)^{1/2}$ soit $v'_1\approx v_1\left(1-\frac{1}{2}\times2\frac{\tau\alpha^2T}{v_1^2}\right)$ et finalement $v'_1\approx v_1-\zeta\frac{T}{v_1}$ avec $\boxed{\zeta=\tau\alpha^2}$.

III.A.1 – Théorème à éviter mais souvent posé ainsi dans les concours… (le seul intéressant qui évite de calculer bêtement des travaux conservatifs est le TEM, et ici le TPM est bien meilleur). Allons-y tout de même…

Référentiel : labo, galiléen ; système : électron de masse m et de charge $-e$; contrainte : aucune ;

BdF : poids négligé, force de Lorentz magnétique seule $\vec{F}_L=-e\vec{v}\wedge\vec{B}$.

On en déduit $\Delta E_c=W(\vec{F}_L)$, mais ce travail est toujours nul car $P(\vec{F}_L)=\vec{F}_L\cdot\vec{v}=0$ (car $\vec{v}\wedge\vec{B}\perp\vec{v}$ par définition du produit vectoriel), donc $W(\vec{F}_L)=\int_0^t 0\,dt=0$. L'énergie cinétique reste toujours constante, donc v^2 aussi donc v également : le mouvement est uniforme.

III.A.2 – Application directe du cours, mais avec des CI un peu différentes…

La RFD est $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-e\vec{v}\wedge\vec{B}=+e\vec{B}\wedge\vec{v}$, que l'on explicite avec une vitesse **quelconque** en coordonnées cartésiennes : $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$. On calcule $\vec{B}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\B_0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ pour en déduire le systèmes d'ED couplées $\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=-\omega v_y\\ \dfrac{dv_y}{dt}=+\omega v_x\\ \dfrac{dv_z}{dt}=0\end{cases}$

L'intégration de la dernière équation est immédiate et donne $v_z=\text{cte}=0$ d'après la vitesse initiale, puis $z=\text{cte}=0$, d'après la position initiale.

On peut utiliser les complexes, ou bien intégrer l'une des équations, par exemple la première : $v_x=-\omega y+\text{cte}$.

Avec les conditions initiales, on obtient $v_x=-\omega y+v_0\cos\dfrac{\pi}{4}=-\omega y+\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, qu'on remplace dans la deuxième équation $\dfrac{d^2y}{dt^2}=+\omega\left(-\omega y+\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$ soit $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=\omega\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, de solution générale (attention à la SP!) :

$y=\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}+C\cos\omega t+S\sin\omega t$, qu'on dérive de suite pour injecter les CI : $v_y=\dot{y}=-C\omega\sin\omega t+S\omega\cos\omega t$.

On a $y(0)=0$ donc $C=-\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}$ et $v_y=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t+S\omega\cos\omega t$, avec $v_y(0)=v_0\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$ donc $S=\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Résumons : $\boxed{v_y=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}(\sin\omega t+\cos\omega t)}$ et $\boxed{y=\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}(1-\cos\omega t+\sin\omega t)}$.

De $v_x=-\omega y+\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, on tire $\boxed{v_x=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}(\cos\omega t-\sin\omega t)}$ soit $x=\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}(\sin\omega t+\cos\omega t)+\text{cte}$, ce qui donne avec la condition de CI nulle $\boxed{x=\dfrac{v_0}{\omega\sqrt{2}}(\sin\omega t+\cos\omega t-1)}$

III.B – Le mouvement étant circulaire uniforme à la vitesse v_0 , l'accélération est purement radiale et sa norme est $a=\dfrac{v_0^2}{R}=v_0\omega=\dfrac{eB_0v_0}{m}$, la puissance rayonnée est donc $P=m\tau a^2=\dfrac{e^4B_0^2v_0^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m^2}=\dfrac{e^4B_0^2}{3\pi\varepsilon_0c^3m^2}E_c$.

Or $P=-\dfrac{dE_c}{dt}$: l'énergie cinétique vérifie alors l'ED linéaire d'ordre 1 $\tau'\dfrac{dE_c}{dt}+E_c=0$ avec $\boxed{\tau'=\dfrac{3\pi\varepsilon_0c^3m^2}{e^4B_0^2}}$ et suit donc la loi $E_c=\dfrac{1}{2}mv_0^2e^{-t/\tau'}$ car $E_c(0)=\dfrac{1}{2}mv_0^2$.

B – Système masse ressort en rotation

1. Si le ressort a une longueur constante, le mouvement de *M* est alors circulaire uniforme : on travaille en coordonnées cylindriques, et non polaires, car les forces ne sont pas toutes horizontales.

   BDF : force de rappel élastique $\vec{F}=-k(L-L_0)\vec{u}_{R\to M}=-k(r-L_0)\vec{u}_r$; poids $\vec{P}=m\vec{g}$; réaction normale $\vec{N}$ car pas de frottements.

   RFD : $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{P}+\vec{N}$ qu'on projette (non intégrable : $\vec{u}_r$ n'est pas une constante)

   Dans la direction du mouvement $a_r=-r\omega^2$, donc $-mr\omega^2=-k(r-L_0)$, soit $\omega^2 r=\omega_R^2(r-L_0)$, et finalement $r=L_{éq}=\dfrac{\omega_R^2}{\omega_R^2-\omega^2}L_0$, qui n'existe que si $\omega_R>\omega$, donc que si le ressort est assez costaud.

   PC : Dans le référentiel tournant, on dira que la force élastique peut compenser la force centrifuge si la vitesse angulaire n'est pas trop importante.

2. On reprend l'étude précédente sans supposer $r=L$ constant : l'accélération radiale est alors $a_r=\ddot{r}-r\omega^2$, car ω est constante, ce qui conduit à l'ED : $\ddot{r}+(\omega_R^2-\omega^2)r=\omega_R^2 L_0$.

   La condition étant réalisée, l'ED est harmonique car l'on peut poser $\Omega^2=\omega_R^2-\omega^2>0$.

   La solution générale est alors $L=L_{éq}+A\cos\Omega t+B\sin\Omega t$, et les conditions initiales aboutissent à $L=L_{éq}+(L_0-L_{éq})\cos\Omega t$.

   La position d'équilibre est donc stable, car on oscille autour en régime libre (en présence de frottements, *L* tend vers $L_{éq}$).

C – Centrale PC Physique 2 2022

Q1. Cours : aucune force n'existe qui pourrait faire sortir le système du plan des conditions initiales.

Q2. Cours : constante des aires, car en la dérivant par rapport au temps, on trouve $\dot{C}=r a_\theta=0$ car la force est radiale (centrale).

Q4. Cours : on trouve par la RFD $V=\sqrt{\frac{G M_S}{R}}$. En assimilant dans les données les demi grands axes à des rayons (énoncé : mouvements circulaires), on trouve $V_T=29{,}8\,\text{km/s}$ et $V_M=24{,}2\,\text{km/s}$.

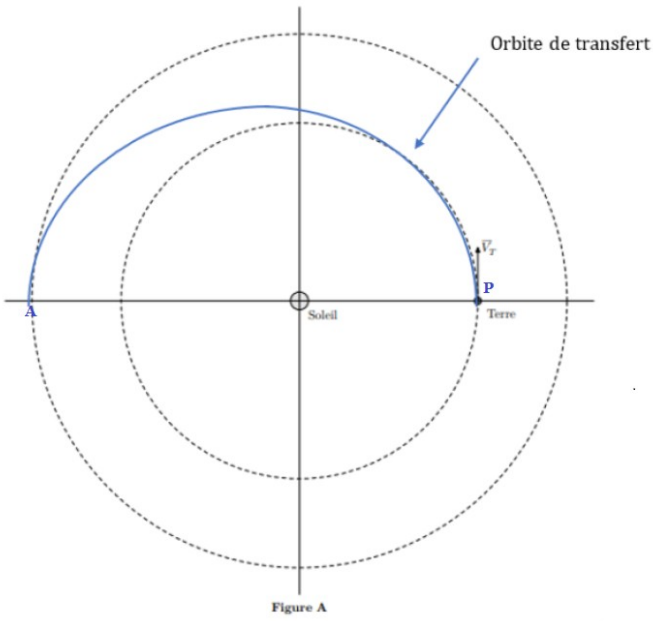


Figure A

Q5. Cours : On obtient $E_c=-E_m=\frac{G M_S m}{2R}$

Q6. Cours : On trouve $\frac{R^3}{T^2}=\frac{G M_S}{4\pi^2}$ soit $T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G M_S}}$.

Q7. Les conditions de tangence de l'ellipse aux deux cercles imposent les positions du périhélie et de l'aphélie de l'orbite de Hohmann : →

Q8. (cf TD) L'énergie mécanique sur l'ellipse s'exprime par $E_m=-\frac{G M_S m}{2a}=E_c+E_{p,g}$ soit $-\frac{G M_S m}{a_M+a_T}=\frac{1}{2}m V'^2_T-\frac{G M_S m}{a_T}$ donc $\frac{1}{2}V'^2_T=\frac{G M_S}{a_T}-\frac{G M_S}{a_M+a_T}=G M_S\frac{a_M}{a_T(a_M+a_T)}$ et puisque $V_T=\sqrt{\frac{G M_S}{a_T}}$: $V'_T=V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M+a_T}}$.

On trouve $\Delta V_T=2{,}93\,\text{km/s}$

Q9. Le vaisseau parcourt une demi ellipse : par symétrie , le voyage prendra une demi période $\Delta t=\frac{T}{2}=2{,}23\cdot10^7\,\text{s}=259\,\text{j}$

Q10. Le mouvement de Mars est circulaire donc uniforme, de vitesse angulaire constante.

Lorsque le vaisseau arrive vers Mars, l'angle θ_M vaut $\pi=180°$.

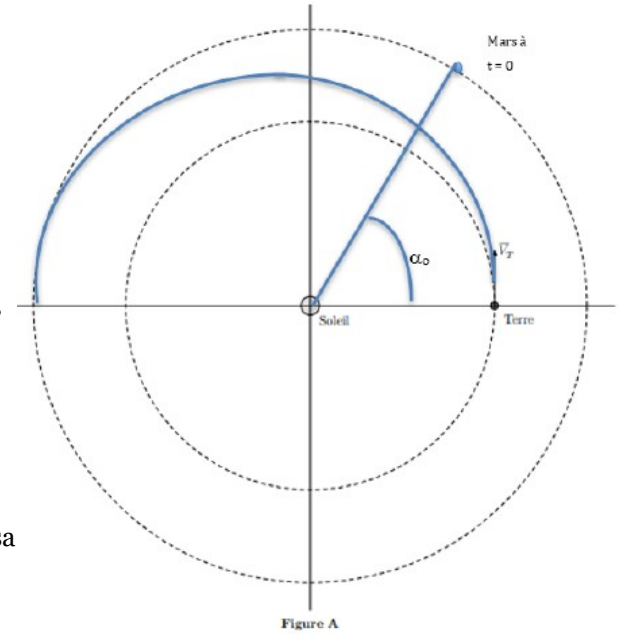
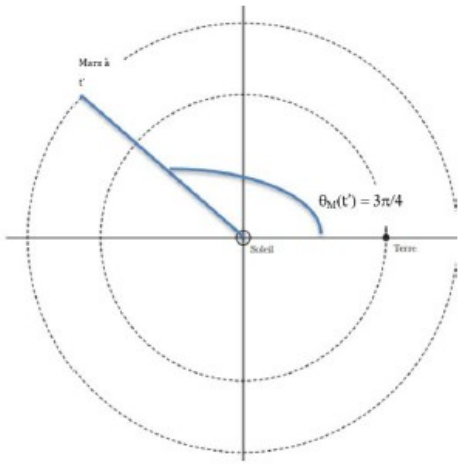


Figure A

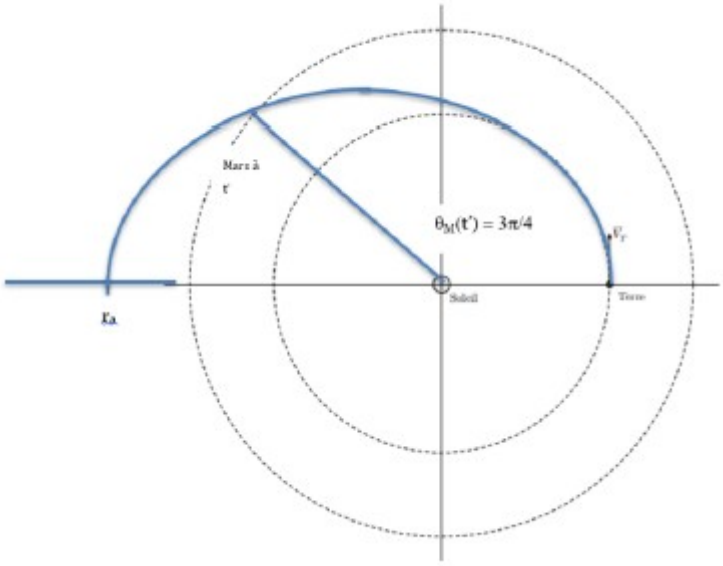
Au moment du lancement, Mars doit donc se trouver 259 j plus tôt sur sa trajectoire, donc à une abscisse angulaire $360°\times\frac{259\,\text{j}}{687\,\text{j}}=136°$ avant sa position définitive, puisque sa période est $T_M=687\,\text{j}$.

On en déduit donc $\alpha_0=180°-136°=44°$.

Q14.



Q15. La nouvelle vitesse est encore colinéaire à $\vec{V}_T$ donc orthoradiale, on se trouve donc soit au périhélie soit à l'aphélie. Comme on est évidemment au plus proche du Soleil ; il s'agit du périhélie.



Q16. L'allure de la nouvelle trajectoire elliptique est alors :

On en déduit donc une première relation entre paramètre p et excentricité e de l'ellipse

$a_M\left(1-\frac{e}{\sqrt{2}}\right)=p$, car $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour déterminer p, on utilise la relation au périhélie, où l'angle polaire est nul :

$a_T(1+e)=p$.

Donc $a_M-e\frac{a_M}{\sqrt{2}}=a_T+a_T e$, ce qui donne immédiatement la relation demandée.

AN : $e=0{,}251$

Q17. On a $E_m=-\frac{G M_S m}{2a}$ avec $2a=a_T+r(\pi)$, puisqu'on se trouve à l'aphélie en π.

$a_A=r(\pi)=\frac{p}{1-e}=a_T\frac{1+e}{1-e}$.

Donc $2a=a_T\left(\frac{1+e}{1-e}+1\right)=\frac{2a_T}{1-e}$ et $E_m=-\frac{G M_S m}{2a_T}(1-e)$ soit $\boxed{E_m=-\frac{1}{2}mV_T^2(1-e)}$ (cf Q8 pour remplacer la vitesse).

Q18. Comme à la question 8, on a $-\frac{1}{2}mV_T^2(1-e)=\frac{1}{2}mV''^2_T-mV_T^2$ soit $\boxed{V''_T=V_T\sqrt{1+e}}$: $V''_T=33{,}4$ km/s

Q19. On a $\Delta V'_T=V_T(\sqrt{1+e}-1)=3{,}53$ km/s

Q20. On a $C=r^2\dot{\theta}=rv_\theta$ donc, puisque la vitesse est orthoradiale au début de la trajectoire elliptique $\boxed{C=a_T V''_T}$.

Q21. On a donc $C=r^2\dot{\theta}=\frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}$, qu'on intègre par rapport au temps : $p^2\int_0^{\Delta t'}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}dt=\int_0^{\Delta t'}C\,dt$.
Comme on a bien $\theta(t=0)=0$ et $\theta(\Delta t')=\theta_M(\Delta t')$, le changement de variable est évident, et en notant I la valeur de l'intégrale donnée, on trouve $p^2 I=C\Delta t'$ soit $\boxed{\Delta t'=(1+e)^2 I\frac{a_T}{V''_T}=1{,}51\cdot10^7\,\text{s}=175\,\text{j}}$.

La durée du transfert a été raccourcie de $259-175=84$ j .