À lire avec soin avant de commencer :
On demande d'encadrer les résultats littéraux en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.
De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.
Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision, sauf si indication contraire (partie I).

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Les trois parties sont indépendantes.

A – D'après Centrale PC Physique 1 2013 – 7 pts

Rayonnement synchrotron

Ce problème a pour but d'étudier le rayonnement émis par des particules élémentaires chargées dans un accélérateur synchrotron. [...]
La deuxième partie étudie une méthode d'accélération des particules, avant leur injection dans l'anneau de stockage, ainsi que l'influence du rayonnement sur cette accélération.
Les troisième et quatrième parties étudient à proprement parler le rayonnement synchrotron émis par les particules dans l'anneau de stockage le long duquel elles sont guidées par un champ magnétique.
Bien qu'il soit question dans ce problème de particules allant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière (particules relativistes voire ultra-relativistes), il est demandé d'utiliser les lois de la mécanique classique (non relativiste). Chaque fois que cela est nécessaire, l'énoncé indiquera la correction qu'il convient d'appliquer au résultat obtenu pour tenir compte des effets relativistes. De plus, on négligera systématiquement le poids des particules devant les autres forces.

Rayonnement d'une particule chargée accélérée

On considère une particule ponctuelle de charge q en mouvement au voisinage d'un point fixe O choisi comme origine du repère de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel $\mathcal{R}_{\text{lab}}$ du laboratoire. Cette particule possède une accélération $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}_{\text{lab}}$ et de ce fait rayonne un champ électromagnétique à longue distance. On cherche à déterminer la puissance totale $\mathcal{P}$ rayonnée par cette particule dans tout l'espace.

On démontre que la puissance rayonnée dans tout l'espace par la particule chargée accélérée est donnée par la formule de Larmor :

$$\mathcal{P}(r,t) = \frac{q^2}{6\,\pi\,\epsilon_0\,c^3}\,a^2(t - r/c)$$

où $a = \|\vec{a}\|$ est la norme du vecteur accélération de la particule et où $r = \|\vec{OM}\|$ est la norme du vecteur position.

On admet que, dans le cadre du problème (**questions II.D et III.B**) , la formule de Larmor devient simplement, dans le cas de l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\,\pi\,\epsilon_0\,c^3}\,a^2 = m\,\tau\,a^2 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{e^2}{6\,\pi\,m\,\epsilon_0\,c^3}$$

Cette puissance rayonnée représente donc la puissance mécanique perdue par l'électron à cause du rayonnement qu'il émet (énergie mécanique perdue par unité de temps par l'effet de son rayonnement).

II Injecteur

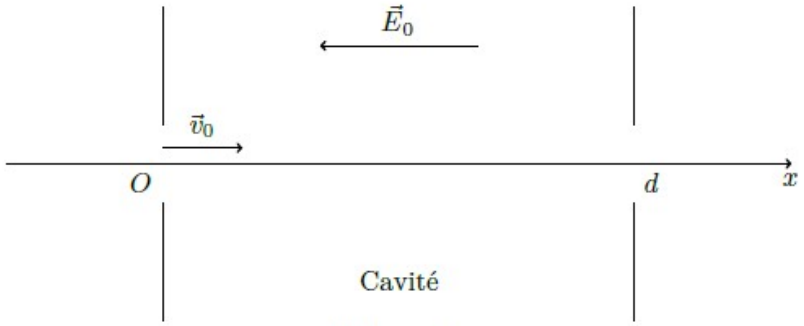


Figure 1

II.B – Pour faire circuler des électrons dans l'anneau de stockage d'un synchrotron, où ils seront guidés le long d'orbites circulaires grâce à un champ magnétique, il faut préalablement les accélérer.

On considère une cavité accélératrice linéaire formée de deux plaques fines et conductrices de grandes dimensions transversales en $x = 0$ et en $x = d$, auxquelles on applique une différence de potentiel constante $U = V(d) - V(0) > 0$ de telle sorte que règne dans l'espace entre les plaques un champ électrostatique uniforme :

$$\vec{E}_0 = -E_0\,\vec{e}_x = -\frac{m}{e}\,\alpha\,\vec{e}_x$$

où m est la masse de l'électron, e la chargé élémentaire ($q_{\text{électron}} = -e$) et α une constante caractérisant l'intensité du champ électrique appliqué.

En déduire l'expression de α en fonction de e, m, U et d.

II.C – Les plaques sont percées le long de l'axe (Ox) afin de permettre aux électrons d'entrer (en $x = 0$) et de sortir (en $x = d$) de la cavité accélératrice. **Voir Figure 1** ci-dessus.

Soit $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$ la vitesse initiale de l'électron à l'entrée de la cavité, à $t = 0$. Déterminer, en négligeant le rayonnement d'énergie électromagnétique par l'électron accéléré, le temps T que met l'électron à traverser la cavité ainsi que sa vitesse de sortie $\vec{v}_1$. On donnera les résultats en fonction de v_0, α et d.

II.D – Le rayonnement d'énergie électromagnétique dû à l'accélération de l'électron modifie son mouvement dans la cavité : il met un temps T' pour franchir la cavité et ressort avec une vitesse $\vec{v}_1'$.

On voudrait déterminer $\vec{v}_1'$. Pour cela, compte tenu du faible effet lié au rayonnement, on fait les hypothèses suivantes.

- On utilise la formule de Larmor pour évaluer la puissance rayonnée par l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\,\pi\,\epsilon_0\,c^3}\,a^2 = m\,\tau\,a^2 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{e^2}{6\,\pi\,m\,\epsilon_0\,c^3}$$

  en prenant pour l'accélération a celle obtenue en négligeant l'effet dû au rayonnement (c'est-à-dire celle correspondant à la situation de la question précédente).
- On considère qu'au premier ordre dans l'évaluation de $\vec{v}_1'$ on peut assimiler le temps que met l'électron à traverser la cavité à T ; on posera donc $T' \simeq T$.

Effectuer un bilan énergétique entre l'entrée et la sortie de l'électron, afin de déterminer $\vec{v}_1'$. On écrira le résultat sous la forme :

$$v_1' \simeq v_1 - \zeta\,\frac{T}{v_1}$$

Exprimer la constante ζ en fonction de α et τ [redacted].

III Anneau de stockage

III.A – L'électron est ensuite injecté (au point O) dans une région où seul règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$.

À $t = 0$ (nouvelle origine des temps) sa vitesse $\vec{v}_1'$, notée ici $\vec{v}_0$, est perpendiculaire au champ magnétique, donc dans le plan (xOy), et fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Ox) conformément à la figure 2.

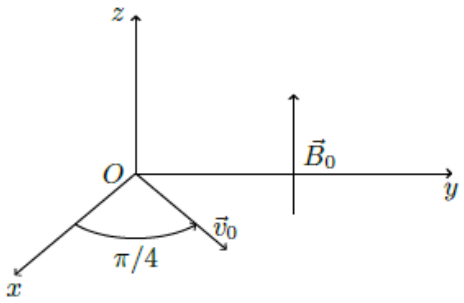


Figure 2

III.A.1) Montrer, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, que si l'on néglige le rayonnement de l'électron, son énergie cinétique $\mathcal{E}_C$ est constante.

III.A.2) En négligeant tout phénomène lié au rayonnement de l'électron, déterminer, en fonction de v_0 et $\omega = e\,B_0/m$, les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de l'électron au cours du temps.

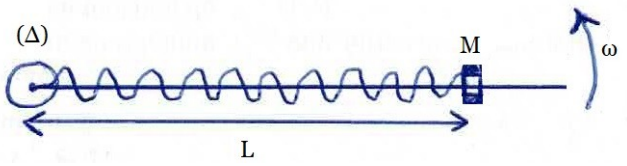
III.B – Du fait du rayonnement émis par l'électron accéléré par le champ magnétique $\vec{B}_0$ son énergie cinétique décroît au cours du temps. Cet effet étant faible, on peut dans la formule de Larmor pour la puissance rayonnée $\mathcal{P}$ rappelée en préambule et en II.D remplacer l'accélération a de l'électron par celle obtenue en ne tenant compte que de l'action du champ magnétique.

Déterminer, en fonction de e, B_0, ϵ_0, c, m et $\mathcal{E}_C$, la puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'électron. En déduire l'expression de l'énergie cinétique de l'électron au cours du temps et déterminer l'expression du temps caractéristique τ' de décroissance de cette énergie.

B – Système masse ressort en rotation – 4 pts

On considère une tige en rotation dans le **plan horizontal**, à la vitesse angulaire ω constante, imposée.

Sur cette tige peut coulisser un point matériel M de masse m. Un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide L_0 est accroché entre l'axe de rotation (Δ) et M.



Tous les frottements sont négligés.
Le champ de pesanteur est noté g.

On travaillera dans le **référentiel du laboratoire**, supposé galiléen. On note $\omega_R = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

1. On cherche la position d'équilibre du système : la longueur du ressort est alors constante, et on notera celle-ci $L_{éq}$.

   Quelle est alors la nature du mouvement de M dans le référentiel d'étude ? Obtenir par une étude dynamique $L_{éq}$ en fonction de L_0, ω et ω_R, puis conclure : à quelle condition cette position d'équilibre existe-t-elle ?

2. On se place maintenant hors équilibre, la condition précédente étant supposée réalisée.

   Montrer que la longueur L du ressort vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2, et la résoudre avec les conditions initiales suivantes $L(0) = L_0$ et $\dfrac{dL}{dt}(0) = 0$.

   La position d'équilibre déterminée précédemment est-elle stable ? Justifier.

C – CENTRALE PC PHYSIQUE 2 2022 – 9 PTS

NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les données numériques utiles sont fournies en fin de sujet.

I Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Justifier qu'un mouvement à force centrale est nécessairement plan.

Q 2. On utilise les coordonnées polaires dans le plan du mouvement. Montrer alors que $C = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement. Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Lors du voyage retour, il faudra de même attendre la synchronisation avec la Terre pour pouvoir la rejoindre avec une orbite similaire.

I.D – Durée de la mission

On calcule (questions non abordées ici) que dans le meilleur des cas, la durée du séjour sur Mars sera de 456 j et la durée totale de la mission de 970 j.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{V}_T$ colinéaire à $\vec{V}_T$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0)=0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \dfrac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.

Q 18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Q 20. Exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a_T et V_T''.

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : $\displaystyle\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2{,}15$ avec l'excentricité calculée en question 16.

Données

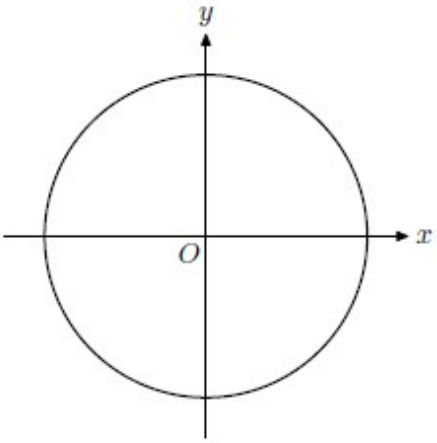
Masse du Soleil	$M_S = 2{,}00\times10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150\times10^{6}$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228\times10^{6}$ km
Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9{,}81$ m·s^{-2}
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours
Période de révolution de Mars	$T_M = 687$ jours

Formulaire

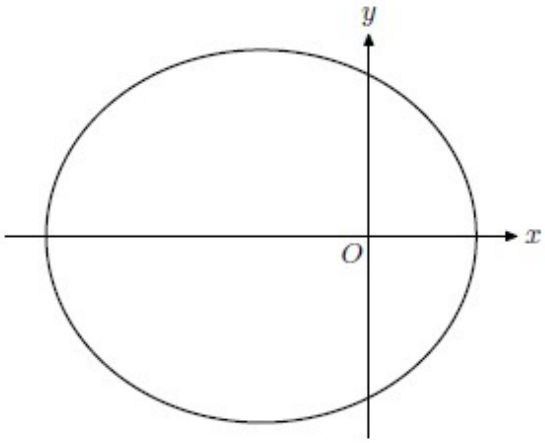
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

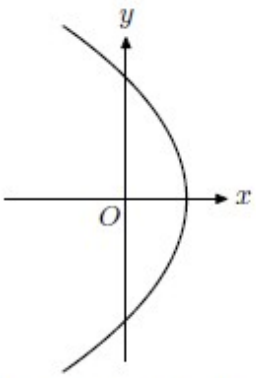
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



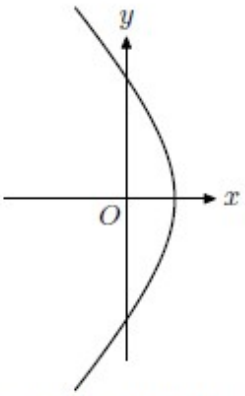
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

FIN

Annexe à rendre avec la copie

NOM, Prénom :

Partie III, figure A

Questions 7 et 10

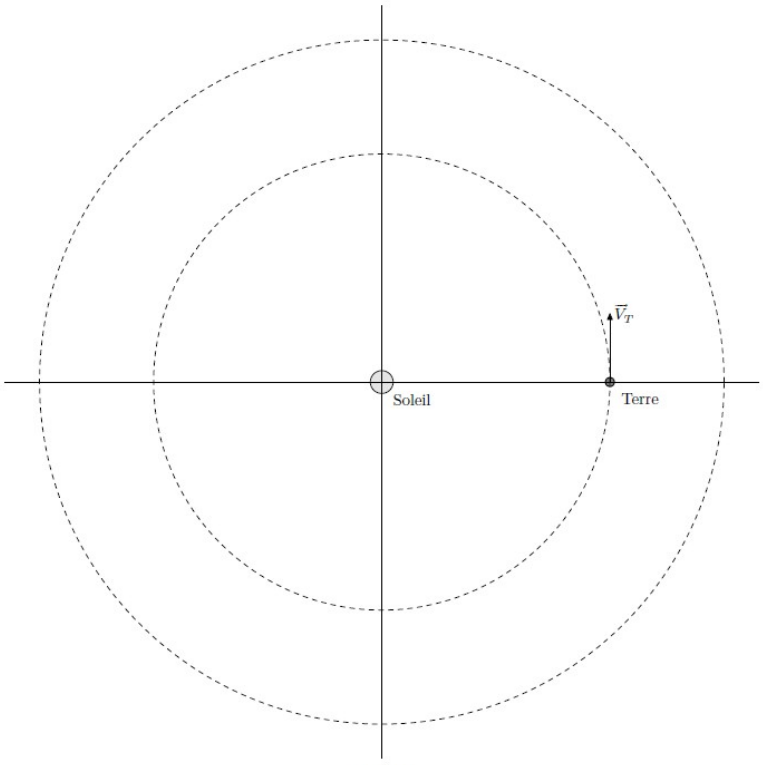


Figure A

Partie III, figure B

Questions 14 et 16

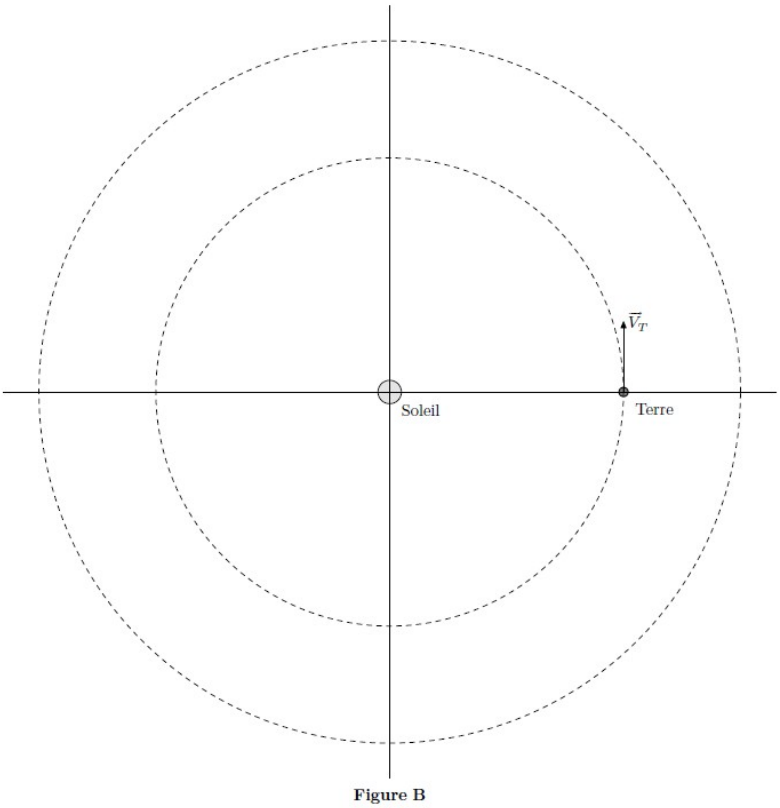


Figure B