À lire avec soin avant de commencer :
On demande d'encadrer les résultats littéraux en utilisant de la couleur pour les mettre en évidence.
De manière générale, il sera tenu compte dans la notation des qualités de présentation et de rédaction de la copie.
Toutes les affirmations doivent notamment être justifiées avec précision, sauf si indication contraire (partie I).

Les résultats doivent toujours être exprimés sous forme littérale avant d'en donner une application numérique (si elle est demandée) : aucun calcul semi-numérique n'est admis. La manipulation des unités dans les applications numériques est imposée.

Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Les trois parties IA, IB et II sont indépendantes.

I – Étude d'une machine tournante – 10 pts

A/ Intérêt d'un volant d'inertie

1. Régime transitoire

Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation vertical, est soumise à partir de l'instant $t=0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma=\Gamma_0$ constant.

Étudier le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\omega$: analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système, puis obtenir l'évolution temporelle de la vitesse angulaire ω.

2. Influence d'une vibration

On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $\Omega/2\pi$ avec un taux de modulation η : $\Gamma=\Gamma_0(1+\eta\cos\Omega t)$, où η est une constante positive sans unité, très inférieure à 1.

a) Reprendre l'étude du mouvement : établir l'équation différentielle définie par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que $\omega(t)=\omega_0[1+\varepsilon(t)]$.

b) Montrer que, au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme $\varepsilon(t)=\alpha\cos(\Omega t-\psi)$.

Déterminer les constantes α et ψ en fonction des données η, Ω et τ.

3. Rôle d'un volant

En s'appuyant seulement sur les résultats précédents, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant.

B/ Importance de l'équilibrage

La machine, toujours de moment d'inertie J, et de masse M, tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 autour d'un axe vertical.

Dans l'industrie, on prend grand soin à équilibrer la machine : l'une des conditions de l'équilibrage est que son centre de gravité G doit absolument être situé sur l'axe de rotation[1].

On s'intéresse ici à une machine légèrement déséquilibrée : le défaut d'équilibrage est modélisé par une masse ponctuelle m ajoutée à la machine équilibrée, située à la distance R de l'axe de rotation en un point noté A.

On rappelle que le nouveau centre de gravité G' de la machine vérifie l'équation $M\vec{G'O}+m\vec{G'A}=\vec{0}$, où le point O est le point de l'axe de rotation appartenant au plan horizontal contenant la masse m (donc l'ancien centre de gravité G).

1. Donner l'expression du moment d'inertie J' de la machine déséquilibrée en fonction de J, m et R.
2. Faire une figure rapide montrant la disposition des points O, G' et A, afin d'en déduire r, distance de G' à l'axe, en fonction de M, m et R.

1 La deuxième condition est que son moment cinétique vectoriel $\vec{L_O}$ doit rester à tout instant colinéaire à l'axe.

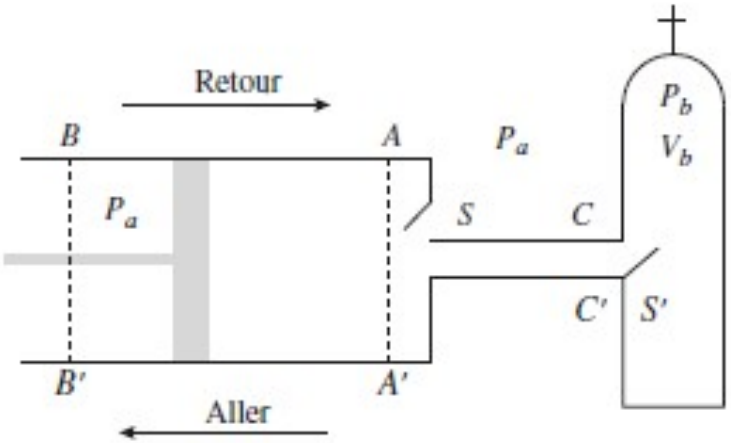
3. Écrire et <u>simplifier</u> la deuxième de Newton, en conservant sa forme vectorielle, sachant que le bilan des forces sur la machine est composé de son poids, et de la réaction de l'axe que l'on décompose en deux forces : $\vec{R}=\vec{R}_V+\vec{R}_H$, où $\vec{R}_V$ est colinéaire à l'axe et $\vec{R}_H$ est un vecteur horizontal.

   En déduire la force exercée par la machine sur l'axe de rotation $\vec{F}_{\text{machine/axe}}$ en fonction de m, R, ω_0 , et $\vec{e}_r$, vecteur unitaire radial centrifuge d'origine G' .

   Justifier avec ce résultat pourquoi il est important d'équilibrer la machine.

II – Remplissage d'une bouteille d'air comprimé – 10 pts

D'après concours commun Mines – Ponts



Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille indéformable, de volume V_b , on utilise un compresseur constitué (voir figure ci-dessus) d'un cylindre, de deux soupapes *S* et *S'*, et d'un piston mobile (sans frottements) entre les positions extrêmes *AA'* et *BB'*.

Dans tout le problème, les transformations de l'air, gaz parfait, sont supposées isothermes, à la température T_0 atmosphérique, qui reste ainsi constante à tout instant.

Voici le fonctionnement du compresseur :

- **Lors de l'aller du piston** (voir figure), on prélève de l'air atmosphérique : la soupape *S'* est fermée dès le début du mouvement, et *S* est ouverte.

  On note V_{MAX} le volume maximal (à la fin de l'aller) occupé par cet air prélevé, volume compris entre les sections *BB'* et *CC'*.

  (On pourra noter $V_{\text{MAX}}=V_{\text{M}}$ dans les calculs).

- **Lors du retour du piston**, le but est d'injecter cet air dans la bouteille : la soupape *S* est toujours fermée.

  De plus, la soupape *S'* <u>s'ouvre dès que la pression dans le cylindre atteint la pression dans la bouteille</u>.

  En raison de l'espace occupé par la soupape et par le tuyau de connexion, le volume minimal dans le compresseur, en fin de retour, est non nul, noté V_{min} (qu'on pourra noter V_{m}), volume compris entre les sections *AA'* et *CC'*.

1. On s'intéresse ici au premier aller et retour du piston : à l'état initial, le compresseur n'a pas encore fonctionné et la pression dans la bouteille est égale à la pression atmosphérique P_a.

   La soupape *S'* s'ouvre donc dès le début du retour du piston.

   a) Obtenir l'expression de la nouvelle pression P_1 dans la bouteille à la fin du premier aller-retour, en fonction de P_a, V_{MAX}, V_{min} et V_b. Application numérique.

   b) En déduire l'expression littérale de la variation de quantité de matière Δn dans la bouteille lors de cet aller et retour. Application numérique.

   Note : Si l'on n'a pas obtenu la réponse à la question 1.a, on pourra revenir à cette application numérique avec la donnée de la question 2.a et l'affirmation 2.b.

2. On s'intéresse désormais à la suite $\{P_0 = P_a ; P_1 ; \ldots ; P_k ; \ldots\}$ vérifiée par la pression dans la bouteille, et on raisonne par récurrence entre les étapes k et $k+1$.

   a) Démontrer que l'on obtient $P_{k+1} = P_k \dfrac{V_b}{V_{min}+V_b} + P_a \dfrac{V_{MAX}}{V_{min}+V_b}$.

   Aide : il est vivement recommandé d'obtenir d'abord l'expression littérale de V', volume de l'air dans le compresseur (entre le piston et la section *CC'*), en fonction notamment de la pression dans la bouteille, au moment où la soupape *S'* s'ouvre.

   b) Vérifier que cette récurrence est bien vérifiée lors du premier aller et retour du piston.

   c) Comment nomme-t-on une telle suite ? En supposant qu'elle admet un point fixe noté P_∞, vérifiant par définition $P_\infty = P_k = P_{k+1}$, obtenir l'expression de P_∞ en fonction de P_a, V_{MAX} et V_{min}.

   Application numérique.

   d) On définit la suite $\pi_k = P_k - P_\infty$. Obtenir en détaillant précisément le calcul l'expression de π_k en fonction de π_0, k, V_{min} et V_b.

3. Durée du remplissage

   Le piston fait 4 allers et retours par seconde : déterminer la durée nécessaire *t* pour que la pression dans la bouteille atteigne 50 bars. Il va de soi qu'un calcul littéral préliminaire soigné s'impose.

Données numériques

$P_a = 1{,}0\,\text{bar}$

$V_b = 5{,}0\,\text{L}$; $V_{MAX} = 2{,}0\,\text{L}$; $V_{min} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3$

$T_0 = 20\,^\circ\text{C}$

Zéro absolu : $-273\,^\circ\text{C}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\,\text{J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$

FIN