

Machine tournante

A 1. Inutile de chercher un bilan des forces et moments complet : la machine étant immobile auparavant, les agents non cités (poids, réaction de l'axe) ont des moments qui se compensent.

Les nouveaux couples sont donnés et le TMC s'écrit donc $\frac{dL}{dt} = J \dot{\omega} = \Gamma_o - k \omega$, ce qui aboutit à l'ED linéaire d'ordre 1 sous forme canonique $\tau \dot{\omega} + \omega = \frac{\Gamma_o}{k}$, avec $\tau = \frac{J}{k}$. On en déduit la solution particulière constante en rayant la dérivée, limite en régime permanent, $\omega_o = \frac{\Gamma_o}{k}$, puis la solution générale $\omega = \omega_o + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et la solution définitive $\omega = \omega_o \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$ grâce à la condition initiale nulle.

A 2 a. L'ED passe alors de $\tau \dot{\omega} + \omega = \frac{\Gamma_o}{k} = \omega_o$ à $\tau \dot{\omega} + \omega = \omega_o (1 + \eta \cos \Omega t)$, où il faut introduire ε :

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(\omega_o [1 + \varepsilon(t)]) = \omega_o \dot{\varepsilon}, \text{ soit } \tau \omega_o \dot{\varepsilon} + \omega_o + \omega_o \varepsilon = \omega_o (1 + \eta \cos \Omega t), \text{ ce qui donne } \tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \eta \cos \Omega t.$$

A 2 b. Le second membre étant sinusoïdal, la solution particulière de l'ED l'est donc aussi, et de même pulsation que lui (sinon il ne pourrait y avoir d'égalité quel que soit t). On peut donc l'écrire ainsi que la donne l'énoncé.

La solution générale homogène qu'il faut ajouter à cette solution particulière est une exponentielle décroissante, qui sera négligeable au bout de quelques τ : il ne reste très vite que la SP.

On doit passer dans les complexes pour la résoudre : on introduit $\underline{\varepsilon}(t) = \alpha \exp[j(\Omega t - \psi)]$ (mais on peut tout-à-fait préférer travailler avec les amplitudes complexes). On sait (ou on vérifie très vite) que $\underline{\dot{\varepsilon}} = j \Omega \underline{\varepsilon}$, ce qui donne à partir de l'ED $\underline{\varepsilon}(t) = \frac{\eta \exp(j \Omega t)}{j \Omega \tau + 1}$.

Par identification, $\alpha = |\underline{\varepsilon}(t)| = \frac{\eta}{\sqrt{\Omega^2 \tau^2 + 1}}$, et $\Omega t - \psi = \text{Arg}(\underline{\varepsilon}(t)) = \Omega t - \text{Arctan}(\Omega \tau)$, soit $\psi = \text{Arctan}(\Omega \tau)$.

A 3. Le rôle du volant (masses situées loin de l'axe) est clairement d'augmenter le moment d'inertie J de la machine, ce qui augmente $\tau = \frac{J}{k}$, et donc l'amplitude α de la perturbation de la vitesse angulaire ω de la machine (τ est au dénominateur de α), qui sera davantage proche de la constante ω_o .

(Pour que le volant soit efficace, on voit qu'il est nécessaire que $\Omega \tau \gg 1$, ce qui donne $\alpha \approx \frac{\eta}{\Omega \tau}$).

B 1. On connaît la contribution d'une masse ponctuelle au moment d'inertie (à partir de $J = \sum_i m_i r_i^2$), donc $J' = J + m R^2$.

B 2. G' est bien sûr aligné avec O et A , entre les deux ; en projetant selon un axe de O vers A , on trouve $-M r + m(R - r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{m}{M + m} R$.

B 3. La seconde loi de Newton est donc $(M + m) \vec{a}_{G'} = \vec{P} + \vec{R}_V + \vec{R}_H$, où les forces verticales se compensent car le mouvement de G' est horizontal. Donc $(M + m) \vec{a}_{G'} = \vec{R}_H$.

De plus, ce mouvement est circulaire uniforme, donc $\vec{a}_{G'} = -r \omega_o^2 \vec{e}_r$. On en déduit $\vec{R}_H = -m R \omega_o^2 \vec{e}_r$, force exercée par l'axe sur la machine.

Les actions réciproques donnent alors $\vec{F}_{\text{machine/axe}} = -\vec{R}_H = +m R \omega_o^2 \vec{e}_r$: tout déséquilibre tend à créer une force tournante subie par l'axe, dont la valeur croît vite avec la vitesse angulaire, et qui tend à déformer voire à briser l'axe.

Remplissage d'une bouteille d'air comprimé

Dans tous les calculs, on utilise la conservation de la quantité $n = \frac{PV}{RT}$; comme $T = T_0$, constante, le produit PV est constant dans toutes les transformations.

1 a. Le système fermé est contenu dans le cylindre et la bouteille.

Au début, sa pression est P_a et son volume $V_{\text{MAX}} + V_b$.

À la fin, sa pression est P_1 et son volume $V_{\text{min}} + V_b$.

$$\text{On en déduit } P_1 = P_a \frac{V_{\text{MAX}} + V_b}{V_{\text{min}} + V_b}.$$

AN : on peut laisser les pressions en bar, mais il faut choisir une unité de volume, par exemple les litres, on a alors $V_{\text{min}} = 2,0 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \text{ L} = 0,020 \text{ L}$, qu'on peut ou non négliger dans ce calcul : $P_1 = 1,0 \times \frac{7}{5,02} \text{ bar} = 1,39 \text{ bar}$.

1 b. On a bien sûr $\Delta n = \frac{(P_1 - P_a)V_b}{RT_0}$, où les unités SI sont ici obligatoires : $T_0 = 293 \text{ K}$, $V_b = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $P_a = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, d'où $\Delta n = 0,081 \text{ mol}$.

2 a. Système : air compris entre les deux soupapes fermées.

Au début, sa pression est P_a et son volume V_{MAX} .

À la fin (S' s'ouvre), sa pression est P_k et son volume V' . On en déduit $P_k V' = P_a V_{\text{MAX}}$.

Système : air dans le cylindre et la bouteille (comme à la question 1)

Au début, sa pression est P_k et son volume $V' + V_b$.

À la fin, sa pression est P_{k+1} et son volume $V_{\text{min}} + V_b$. On en déduit $P_k (V' + V_b) = P_{k+1} (V_{\text{min}} + V_b)$.

On développe à gauche pour éliminer V' : $P_a V_{\text{MAX}} + P_k V_b = P_{k+1} (V_{\text{min}} + V_b)$, ce qui est la récurrence annoncée.

2 b. La récurrence donnée conduit à $P_1 = P_0 \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b}$, avec $P_0 = P_a$, donc

$$P_1 = P_a \left(\frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b} \right), \text{ qui est le résultat de la question 1 a.}$$

2 c. C'est une suite arithmético-géométrique.

On a alors $P_{\infty} = P_{\infty} \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b}$ donc $(V_{\text{min}} + V_b)P_{\infty} = P_{\infty} V_b + P_a V_{\text{MAX}}$, soit $P_{\infty} = P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} = 100 \text{ bar}$.

2 d. On remplace $P_k = \pi_k + P_{\infty}$: $\pi_{k+1} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} = \left(\pi_k + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} \right) \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b}$, donc

$$\pi_{k+1} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} = \pi_k \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b} : \pi_{k+1} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}} = \pi_k \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} + P_a \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}} + V_b} \left(\frac{V_b}{V_{\text{min}}} + 1 \right)$$

et finalement $\pi_{k+1} = \pi_k \frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b}$, suite géométrique.

$$\text{On en déduit } \pi_k = \pi_0 \left(\frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} \right)^k.$$

3. On cherche d'abord le nombre k d'étapes nécessaires. Il faut prendre le logarithme pour obtenir k :

$$\ln \left(\frac{\pi_k}{\pi_0} \right) = k \ln \left(\frac{V_b}{V_{\text{min}} + V_b} \right) \text{ ou encore } k = \frac{\ln \left(\frac{\pi_0}{\pi_k} \right)}{\ln \left(1 + \frac{V_{\text{min}}}{V_b} \right)}. \text{ AN : } \pi_0 = 99 \text{ bar, puis } k = 171, \text{ puis } t = 42,8 \text{ s.}$$

