TD 22 – Conservation de l’énergie

1. Jouet à air comprimé

a) La conservation de l’énergie totale donne $\Delta U+\Delta E_c+\Delta E_{pp}=W+Q$ avec des transferts nuls : le travail du poids est dans l’énergie potentielle de pesanteur, et aucun transfert thermique avec l’extérieur (« sans perte »).

On a :

$$\Delta U=\frac{5}{2}nR(T_0-T_1) \text{ et } nRT_1=PV \ : \ \Delta U=\frac{5}{2}PV\left(\frac{T_0}{T_1}-1\right)$$

$$\Delta E_c=0-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta E_{pp}=mgh-0$$

dont la somme est nulle : $mgh=\frac{5}{2}PV\left(1-\frac{T_0}{T_1}\right)+\frac{1}{2}mv_0^2$

AN pour les deux contributions, pour comparer : $-\Delta U=\frac{5}{2}PV\left(1-\frac{T_0}{T_1}\right)=768\text{ J}$,

$-\Delta E_c=\frac{1}{2}mv_0^2=9\text{ J}$, beaucoup plus faible ...

On trouve $h=39{,}6\text{ m}$, et

b) ... sans le terme d’énergie interne : $h_{\text{mec}}=45{,}9\,\text{cm}$

2. Transformation cyclique

a) $P_B=2P_0$ car $PV=nRT$ et n, V fixés, $V_C=2V_0$ car P est divisée par 2 et T est fixée.

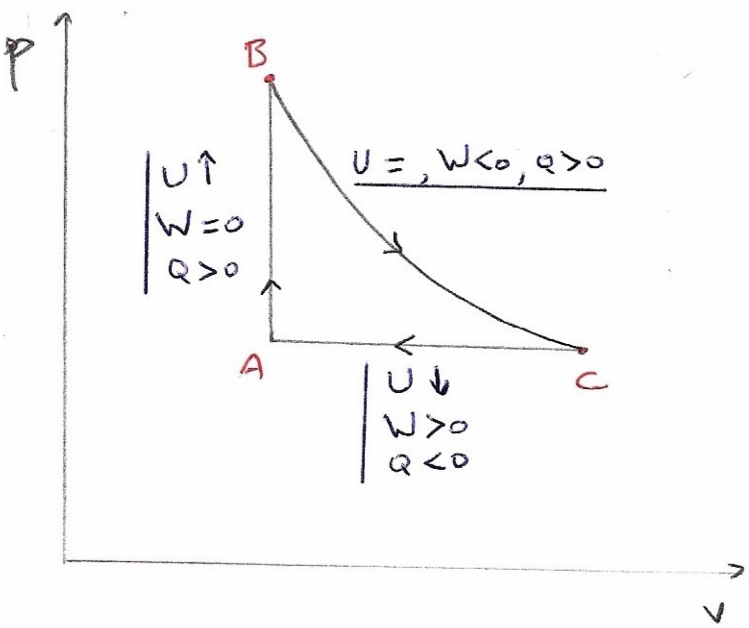
b)

$W_{\text{AB}}=0$,

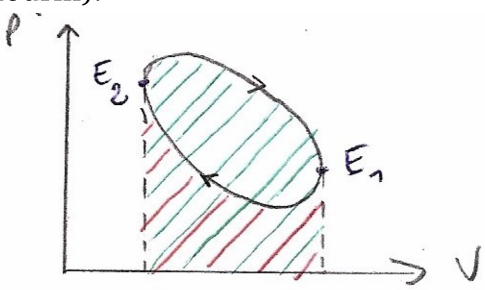
$W_{\text{BC}}=\int_{V_0}^{2V_0}-P\,dV=-2\ln 2\,nRT_0$,

$W_{\text{BC}}=\int_{2V_0}^{V_0}-P\,dV=+P_0V_0=nRT_0$ donc

$W=-(2\ln 2-1)nRT_0<0$: le gaz a fourni du travail, c'est un cycle moteur.



Aire du cycle = valeur absolue du travail + sens horaire = travail négatif (fourni).



c)

d)

$\Delta_{A\rightarrow B\ldots\rightarrow A}U=0$ car c'est une transformation cyclique : $Q=-W>0$

e) $A\rightarrow B$: $W=0$ (isochore), $Q>0$ et U augmente car U=U(T) avec T qui a augmenté.
$B\rightarrow C$: $W<0$ (calculé), U reste constante (T cte) donc $Q>0$
$C\rightarrow A$: $W>0$ (calculé), U diminue car T aussi, donc $Q<0$

3. Phase condensée

On a $C=\dfrac{dU}{dT}$ pour une PCI : il suffit donc d'intégrer entre les deux températures.

$$U(T_2)-U(T_1)=\int_{T_1}^{T_2} C(T)\,dT \ : \Delta U=C_0(T_2-T_1)+a\ln\frac{T_2}{T_1}+\frac{1}{2}b(T_2^2-T_1^2)$$

4. Ballon de baudruche

Ballon de baudruche

a) On utilise la loi des GP : $n=\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$ avec $V_0=\frac{4}{3}\pi r_0^3$, r_0 étant le rayon : $r_0=20\text{cm}$

donc $n=\dfrac{1{,}013.10^5 \times 4/3\,\pi\,(0{,}20)^3}{8{,}314\times(273+33)}=1{,}334\text{ mol}$ (avec $V_0=33{,}5.10^{-3}\text{ m}^3$)

On a la conservation de n :

$$\frac{P_0V_1}{RT_1}=\frac{P_0V_0}{RT_0} \ : \ V_1=V_0\frac{T_1}{T_0}=31{,}0.10^{-3}\text{ m}^3$$

on en déduit $d_1=2\left(\dfrac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3}$: $d_1=39{,}0\text{ cm}$

b) He : GP monoatomique $U=\frac{3}{2}nRT$

$$\Delta U+\cancel{\Delta E_c}+\cancel{\Delta E_p}=W_{pr}+\cancel{W_u}+Q \ : \ Q=\Delta U-W_{pr}$$

où la transformation est isobare, donc monobare !

$$Q=\frac{3}{2}nR(T_1-T_0)+P_0(V_1-V_0)$$
$$=\frac{3}{2}nR(T_1-T_0)+nRT_1-nRT_0$$
$$Q=\frac{5}{2}nR(T_1-T_0)$$

A.N : $Q=-638\text{ J}$

5. Équilibre thermique d'un système

Système isobare

1. Transformation isobare : la pression extérieure est constante à P_0 et l'expérience est suffisamment lente pour que P soit uniforme.

2. Aucun travail reçu par le cuivre : son volume est constant.
Dans le cas du gaz, la transfo est isobare, donc monobare :
$\delta W_{pr} = -P_0\, dV$: $W_{pr} = \int \delta W_{pr} = -P_0(V_F - V_0) < 0$
En effet $V_F > V_0$: le bloc du cuivre chauffe le gaz à pression constante, son volume augmente.

3. Premier principe, système = {gaz + cuivre}

$$\Delta U + \underbrace{\cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p}}_{\text{négligeable}} = W_{pr} + \underbrace{\cancel{Q}}_{\text{isolé}} + \cancel{W_e}$$

avec $U = U_{gaz} + U_{cuivre}$: $\Delta U = \frac{5}{2} nR(T_F - T_0) + mc(T_F - T_I)$

$\left(\frac{5}{2} \text{ ou bien } \frac{1}{\gamma - 1} \text{ avec } \gamma = 1{,}40 \right)$

De plus $P_0 V_0 = nRT_0$ et $P_0 V_F = P_F V_F = nRT_F$

donc $\frac{5}{2} nR(T_F - T_0) + mc(T_F - T_I) = -nRT_F + nRT_0$

$= -nR(T_F - T_0)$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\frac{7}{2} nR(T_F - T_0) + mc(T_F - T_I) = 0$ (2)

$\Leftrightarrow$ $T_F = \dfrac{7/2\, nRT_0 + mcT_I}{7/2\, nR + mc} = 64{,}7\,°C$ car $n = 0{,}818$ mol

À V ct : Même équation (1) avec 0 à droite

$\frac{5}{2} nR(T_F - T_0) + mc(T_F - T_I) = 0$: $T_F = \dfrac{5/2\, nRT_0 + mcT_I}{5/2\, nR + mc}$

$T_F = 76{,}8\,°C$

Système isobare (2)

4. (J)	Cuivre	Gaz	Total
ΔU	$mc(T_F - T_I) = -1040$	$C_v(T_F - T_I) = 743$	-297
W	0	$-nR(T_F - T_0) = -297$	-297
Q	$= \Delta U = -1040$	$= \Delta U - W = 1040$	0

5. Transfo isobare $\Rightarrow$ monobare + $P_I = P_F = P_0$, donc

$\Delta H + \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p} = \cancel{Q} + W_u$: $\Delta H = 0$

$\Delta H = \Delta H_{cuivre} + \Delta H_{gaz} = mc(T_F - T_I) + \frac{7}{2} nR(T_F - T_0)$

$= 0$

qui est l'équation (2) de la question 3.

6.

<u>Recherche état final</u>

a) La pression est double à droite de la cloison : celle-ci va partir comprimer le gaz à gauche → oscillations à cause du ressort, puis équilibre où $V_1 < V_2$.

b) Le volume total se conserve : $V_1 + V_2 = 2V_0$ (1)

La paroi est diatherme donc même température finale : $T_1 = T_2$ (2)

Les quantités se conservent : $\dfrac{P_1 V_1}{RT_1} = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}$ (3)

(R se simplifie) $\dfrac{P_2 V_2}{RT_2} = \dfrac{2P_0 V_0}{RT_0}$ (4)

Équilibre mécanique de la paroi ; avec $\xleftarrow[x]{}$:

$-P_1 S + P_2 S - kx = 0$

où x est le déplacement de la cloison,

or $x = \dfrac{V_2 - V_0}{S}$

: $P_1 = P_2 - k\dfrac{V_2 - V_0}{S^2}$ (5)

Conservation de l'énergie totale

$n = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}$ et $U = \dfrac{5}{2} nRT$

$U_{10} = \dfrac{5}{2} P_0 V_0$ $\quad U_{1F} = \dfrac{5}{2} P_1 V_1$

$U_{20} = \dfrac{5}{2}(2P_0 V_0)$ $\quad U_{2F} = \dfrac{5}{2} P_2 V_2$

$E_{pF} = \dfrac{1}{2} k x^2$

: $3P_0 V_0 = P_1 V_1 + P_2 V_2 + k\dfrac{(V_2 - V_0)^2}{5S^2}$ (6)

6. Chute d'un piston

a) On a bien sûr $n=\frac{P_0 V_0}{R T_0}$, où V_0 n'est pas connu, mais le cylindre étant cylindrique, on a $V_0 = S H_0$.

b) Le coefficient γ est donné, et on a $\begin{cases} C_P / C_V = \gamma \\ C_P = C_V + nR \end{cases}$ donc $C_P = \gamma C_V$ et $C_V = \frac{1}{\gamma - 1} nR$, ainsi que $C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR$ (avec $nR = \frac{S P_0 H_0}{T_0}$)

c) La transformation étant très lente et les parois diathermes, il y aura à tout instant équilibre thermique à T_0 : la transformation est donc isotherme.

d) On aura bien évidemment $T_1 = T_0$.

Le piston, certes sans masse au départ, a maintenant une masse m sur lui : son équilibre mécanique donne (calcul déjà fait plusieurs fois) $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$.

La température n'ayant pas changé, la conservation de n aboutit à $PV = \text{cte}$, soit $P_0 V_0 = P_1 V_1$, et puisque S se simplifie : $H_1 = H_0 \frac{P_0}{P_1}$

e) Non, puisqu'elle ne dépend que de la température, qui n'a pas changé.

f) La transformation est brutale et adiabatique.

g) L'équilibre du piston donne le même résultat qu'avant : $P_2 = P_0 + \frac{mg}{S} = P_1$

h) Conservation de n : $\frac{PV}{T} = \text{cte}$ donc $\frac{T_2}{T_0} = \frac{P_2}{P_0} \frac{H_2}{H_0}$.

i) Pour le système {gaz+piston+masse}, on a $\Delta E_{\text{tot}} = \Delta U + \Delta E_C + \Delta E_p = Q + W_{\text{pr}} + W_U$.

Pas de travail utile W_U , ni de transfert thermique Q (tout est calorifugé), ni de variation d'énergie cinétique (immobilité au début et à la fin, même si E_C est non nulle pendant la transformation).

L'énergie potentielle de pesanteur varie : $\Delta E_p = mg(H_2 - H_0)$ (la masse du piston lui-même est négligeable – énoncé – et celle du gaz aussi – sous entendu).

L'atmosphère étant un pressostat, le travail reçu par le système est (la transformation est monobare : la pression peut sortir de l'intégrale du travail) :
$W_{pr} = -P_0 \Delta V = -P_0 S (H_2 - H_0)$

Le piston étant calorifugé, sa température et son énergie interne ne varient pas, il ne reste que la variation d'énergie interne de l'air $\Delta U = C_V \Delta T = C_V (T_2 - T_0)$.

Finalement : $C_V (T_2 - T_0) + 0 + mg(H_2 - H_0) = 0 - P_0 S (H_2 - H_0) + 0$ soit
$C_V (T_2 - T_0) = (mg + P_0 S)(H_0 - H_2)$, qui est bien l'expression demandée puisque $P_2 S = P_0 S + mg$.

Attention : la transformation du système complet est bien monobare, mais les hypothèses nécessaires à l'application du premier principe enthalpique ne sont pas vérifiées :
mais $P_F = P_2 \neq P_0$.

j) On veut éliminer C_V et les hauteurs : $\frac{SP_0H_0}{T_0}(T_2-T_0)=(\gamma-1)P_2S(H_0-H_2)$.

On divise par SP_0H_0 : $\frac{T_2}{T_0}-1=(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\left(1-\frac{H_2}{H_0}\right)$, et on a obtenu ce dernier rapport : $\frac{H_2}{H_0}=\frac{T_2}{T_0}\frac{P_0}{P_2}$.

$\frac{T_2}{T_0}-1=(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\left(1-\frac{T_2}{T_0}\frac{P_0}{P_2}\right)=(\gamma-1)\left(\frac{P_2}{P_0}-\frac{T_2}{T_0}\right)$: $(1+\gamma-1)\frac{T_2}{T_0}=1+(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}$ et donc $T_2=\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{P_2}{P_0}\right)T_0$.

Puisque $P_2>P_0$, $T_2>\frac{1}{\gamma}(1+(\gamma-1))T_0$, donc $T_2>T_0$: c'est normal, le système est calorifugé, mais il a reçu du travail, son énergie interne a donc augmenté, et donc sa température aussi.

7. Détente brutale d'un gaz parfait

1. Les forces sur le piston sont horizontales : à l'équilibre, la pression du gaz est donc égale à p_0.

   On a donc $n=\frac{p_0V_0}{RT_0}+0$ (0 à droite).

2. Le piston est maintenant en mouvement, on a donc $m\vec{a}=+p_0S\vec{u}_x-p_GS\vec{u}_x$, en prenant l'axe *x* vers la droite et en notant p_G la pression exercée par le gaz sur le piston.

   Comme la masse du piston est supposée nulle, le terme à gauche s'annule, et on a $p_0S\vec{u}_x=p_GS\vec{u}_x$, donc égalité des pressions : $p_G=p_0$.

   (Pour les puristes, d'accord que $p_G=p_0$ s'exerce à l'intérieur de la frontière du système gaz, et pas à l'extérieur, mais les actions réciproques conduisent à $\vec{F}_{\text{gaz/piston}}=-\vec{F}_{\text{piston/gaz}}$)

3. Comme la pression est différente (« strictement ») de p_0, le piston est nécessairement bloqué par la cloison F.

4. D'après la question suivante, la température intervient dans au moins l'une des méthodes : c'est par le <u>bilan d'énergie</u> totale $\Delta E_{\text{tot}}=\Delta U+\Delta E_C+\Delta E_p=Q+W_{\text{pr}}+W_U$ où $Q=W_U=0$ ainsi que $\Delta E_C=\Delta E_p=0$.

   Par ailleurs, $\Delta U=C_V\Delta T$: $W_{pr}=W_1=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_0V_0}{T_0}(T_1-T_0)$.

   Dans la seconde méthode, on le calcule <u>directement</u>, à partir du travail des forces de pression :

   force de pression à gauche : $+p_0S\vec{u}_x$, constante, avec comme déplacement la longueur L_A du compartiment A dans le même sens, donc $W_G=+p_0SL_A$.

   force de pression à droite : 0, car c'est le vide...

   On a donc $W_1=+p_0V_0$.

   (On ne peut pas appliquer ici $\delta W_{pr}=-P_{\text{ext}}dV$ car il y a deux pressions différentes qui s’exercent sur la frontière mobile du système, et il fallait pour ce résultat l’hypothèse P_{ext} uniforme à la frontière).

5. On égalise en divisant par $p_0 V_0$: $\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{T_1}{T_0}-1\right)=1$, ce qui donne bien $T_1=\gamma T_0$.

6. La quantité se conserve, donc $\frac{p_1 V_B}{T_1}=\frac{p_0 V_0}{T_0}$ soit $p_1=\gamma\frac{V_0}{V_B}p_0$.

   On souhaite que $p_1<p_0$: $\gamma\frac{V_0}{V_B}<1$ donc $V_B>V_{Bm}$ avec $V_{Bm}=\gamma V_0$

7. Le travail reçu est maintenant nul : $\Delta U=0$ d’après le premier principe, et comme *U* ne dépend que de *T* pour un GP, la température ne varie pas : $T_2=T_0$.

   (On le retrouve évidemment avec $\Delta U=C_V\Delta T$: $\Delta T=0$)