TD 25 – Correction Laplace

1. Briquet à air

On a $PV^{\gamma}=\text{cte}=P_0V_0^{\gamma}$: $P=P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}=1\,\text{bar}\cdot 100^{1,4}=631\,\text{bar}$. De plus, $\frac{PV}{T}=\frac{P_0V_0}{T_0}$:

$$T=T_0\frac{PV}{P_0V_0}=(273+12)\,\text{K}\cdot 100^{0,4}=1798\,\text{K}=1525\,°\text{C}$$

$$\Delta U=W=\frac{1}{\gamma-1}\Delta(PV)=\frac{1}{0,4}\left(631\,\text{bar}\times 0,02\,\text{cm}^3-1\,\text{bar}\times 2\,\text{cm}^3\right)=2,66\,\text{J} \quad \text{ou} \quad \Delta U=C_V\Delta T$$

$$\Delta H=\Delta U+\Delta(PV)=\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\right)\Delta(PV)=\gamma\,\Delta U=3,72\,\text{J}$$

($nR\Delta T=\Delta(PV)$)

$1\,\text{cm}^3=(10^{-2}\,\text{m})^3=10^{-6}\,\text{m}^3$

ΔH : avec Cp possible - $\Delta H=\gamma\,\Delta U$.

2. Transformation adiabatique du GP

1. $PV^{\gamma}=\text{cte}=P_0V_0^{\gamma}$
2. Comme $PV=nRT$, on a $P\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma}=\text{cte}$ soit $P^{1-\gamma}T^{\gamma}=\text{cte}'=P_0^{1-\gamma}T_0^{\gamma}$ donc $\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}}=\frac{T_0^{\gamma}}{P_0^{\gamma-1}}$

   soit $\frac{T}{P^{1-\frac{1}{\gamma}}}=\frac{T_0}{P_0^{1-\frac{1}{\gamma}}}$
3. On a $T=T_0\cdot 2^{1-\frac{1}{\gamma}}$ avec $\gamma_{\text{mono}}=\frac{5/2}{3/2}=\frac{5}{3}$ et $\gamma_{\text{di}}=\frac{7/2}{5/2}=\frac{7}{5}$.

   On trouve $2^{1-\frac{1}{\gamma_{\text{mono}}}}=1,32$ et $2^{1-\frac{1}{\gamma_{\text{di}}}}=1,22$ soit $T_{\text{mono}}=114\,°\text{C}$ et $T_{\text{di}}=84\,°\text{C}$

3. Paroi mobile

1. La transformation subie par le GP dans le compartiment A n'est pas simple.

   En revanche, celle subie par le GP dans B est adiabatique très lente, supposée réversible d'après l'énoncé, donc Laplace :

   $P_2 V_{Bf}^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$, avec $V_B = 2V_1 - V_A$: $P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{2V_1 - V_A}\right)^{\gamma} = P_1\left(2 - \frac{V_A}{V_1}\right)^{-\gamma}$, forme qui évite les conversions d'unités.

   On trouve $P_2 = 1{,}16 \cdot 10^5 \,\mathrm{Pa}$

2. On peut appliquer Laplace une deuxième fois, en contrôle TV ou TP, mais également utiliser la loi du GP puisqu'il ne manque qu'une information : $\frac{P_2 V_B}{T_B} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$ soit

   $T_B = T_1 \frac{P_2}{P_1}\frac{V_B}{V_1}$ ($V_B = 0{,}9\,\mathrm{L}$), donc $T_B = 313\,\mathrm{K}$.

3. Loi des GP : même calcul qu'au 2 : $T_A = T_1 \frac{P_2}{P_1}\frac{V_A}{V_1} = 382\,\mathrm{K}$

4. Premier principe général (évidemment pas monobare!) : $\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_p = Q + W_{\mathrm{pr}} + W_U$, donc $W_B = \Delta U = C_V \Delta T$.

   On a $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$, avec $n = \frac{P_1 V_1}{R T_1}$, et $\Delta T = T_B - T_1 = 13\,\mathrm{K}$, donc $W_B = 10{,}8\,\mathrm{J}$

5. Le travail reçu par B est fourni par A, donc $W_A = -W_B = -10{,}8\,\mathrm{J}$

   $\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_p = Q + W_{\mathrm{pr}} + W_U$: $Q = C_V(\mathrm{T_A} - \mathrm{T_1}) - W_A = 79{,}5\,\mathrm{J}$

   $Q = R_0 I^2 \tau$ donc $\tau = 7{,}9\,\mathrm{s}$

4. Oscillations adiabatiques : autre mesure de γ

La gaz à gauche occupe le volume $V_1 = V_0 + Sx$, celui à droite le volume $V_2 = V_0 - Sx$, en prenant l'axe vers la droite.
On suppose que les oscillations sont suffisamment lentes et petites pour que, dans chaque compartiment, la transformation soit supposée adiabatique : $P_1 V_1^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$ et $P_2 V_2^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$.

Donc $P_1 = P_0\left(\frac{V_0}{V_0 + Sx}\right)^{\gamma} = P_0\left(1 + \frac{S}{V_0}x\right)^{-\gamma}$ et de même $P_2 = P_0\left(1 - \frac{S}{V_0}x\right)^{-\gamma}$.

Une RFDx sur le piston donne $m\ddot{x} = +P_1 S - P_2 S$.
Au premier ordre non nul, on a $P_1 = P_0\left(1 - \gamma\frac{S}{V_0}x\right)$ et $P_2 = P_0\left(1 + \gamma\frac{S}{V_0}x\right)$, ce qui donne

$m\ddot{x} = P_0 S\left(-2\gamma\frac{S}{V_0}x\right)$, d'où une fréquence des petites oscillations $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\gamma P_0 S^2}{m V_0}}$.

On en déduit bien sûr γ par mesure de f_0 et inversion de l'expression ci-dessus.

5. Expérience de Clément et Desormes : mesure de γ

(a) Chauffage isochore à volume constant $V_B = V_C = V$. On a $P_B = P_0$ et $T_C = T_0$ et $P_C = P_0 + p_2$

(b) Détente adiabatique réversible, avec $T_A = T_0$ et $P_A = P_0 + p_1$, le volume est plus petit à cause de la quantité de matière qui s'est échappée.

(c) L'isotherme passant par A passe aussi par C

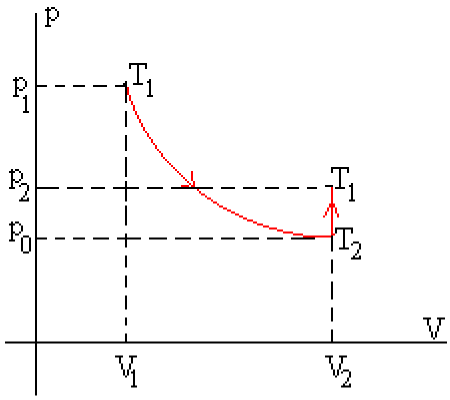

Figure : T_1 c'est T_0 de l'énoncé, $V_1 = V_A$, $V_2 = V$, remplacer p_1 et p_2 par $P_0 + p_1$ et $P_0 + p_2$

(d) On calcule $p_{\text{isoth}} = \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{isoth}} = -\frac{P_A}{V_A}$ et $p_{\text{adiab}} = \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{adiab}} = -\gamma \frac{P_A}{V_A}$.

On a $\frac{P_A - P_B}{\delta V} = p_{\text{adiab}} = \frac{p_1}{\delta V}$ et $\frac{P_A - P_C}{\delta V} = p_{\text{isoth}} = \frac{p_1 - p_2}{\delta V}$ donc $p_1 = \gamma (p_1 - p_2)$ soit

$\gamma = \frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$: $\gamma = 1{,}38$.