

TD 26 – Machines Correction

1.

Un petit moteur

L'efficacité de Carnot est $e_{\max} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$: $e_{\max} = 1 - \frac{273+20}{273+100} K$
soit $e_{\max} = 21,45\%$

On en déduit $e = \tau e_{\max} = 2,145\%$

Par ailleurs $e = \frac{(-W)}{Q_C}$: W , négatif, définissant le rôle d'un moteur ("utile")

Q_C , nécessaire à son fonctionnement (facturé).

$$\text{donc } Q_C = \frac{-W}{e} = \frac{+100 J}{2,145\%} : \underline{Q_C = 4663 J}$$

2.

Augmentation du rendement de Carnot

On note $\tau = 10^\circ C$: il faut donc comparer

$$e_1 = 1 - \frac{T_F}{T_C + \tau} \text{ avec } e_2 = 1 - \frac{T_F - \tau}{T_C}$$

$$e_1 > e_2 \Leftrightarrow -\frac{T_F}{T_C + \tau} > -\frac{T_F - \tau}{T_C}$$

$$\Leftrightarrow -T_F T_C > -(T_F - \tau)(T_C + \tau) \quad (T_C \text{ et } T_C + \tau \text{ positifs})$$

$$\Leftrightarrow -T_F T_C > -(T_F T_C - \tau^2 + \tau(T_F - T_C))$$

$$\Leftrightarrow \tau^2 - \tau(T_F - T_C) < 0$$

$$\Leftrightarrow \tau^2 < \tau(T_F - T_C)$$

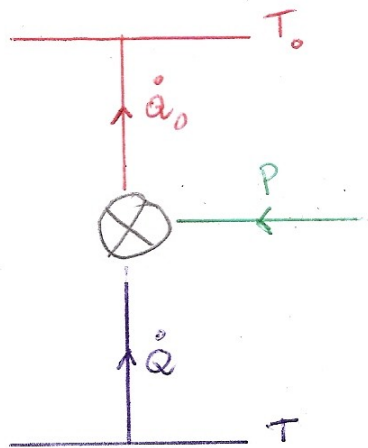
$$\Leftrightarrow \underline{\tau < T_F - T_C} \text{ car } \tau > 0$$

Or $T_F < T_C$: $T_F - T_C < 0$: c'est faux

Il est plus efficace de diminuer T_F .

3.

Puissance fournie à un congélateur



(a) Relation entre $\dot{Q}$ et $\dot{Q}_0$?

→ Second principe, écrit par le temps :

$$\frac{\dot{Q}}{T} + \frac{\dot{Q}_0}{T_0} = 0 \text{ car réversibilité}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_0 = -\frac{T_0}{T} \dot{Q}$$

A.N: $\dot{Q} > 0$: $\dot{Q}_0 = -461 \text{ kJ/h}$

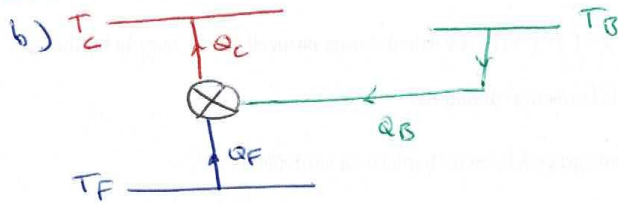
b) Premier principe machine cyclique :

$$P + \dot{Q} + \dot{Q}_0 = 0 \Rightarrow \underline{P = -\dot{Q} - \dot{Q}_0}$$

$$\Rightarrow \underline{P = 61 \text{ kJ/h}}$$

4. Réfrigérateur tritherme

Réfrigérateur tritherme



$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ ppe machine } (\Delta U = 0) : Q_B + Q_C + Q_F = 0 \\ 2^{\text{nd}} \text{ ppe } (\Delta S = 0) : \frac{Q_B}{T_B} + \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_c = 0 \end{array} \right\}$$

c) utile sur facture donc $e = \frac{Q_F}{Q_B}$ (les deux sont positifs).

$\Rightarrow$ On élimine $Q_C = -Q_B - Q_F$:

$$\frac{Q_B}{T_B} - \frac{Q_B + Q_F}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_c = 0, \text{ qu'on divise par } Q_B$$

pour faire apparaître e :

$$\frac{1}{T_B} - \frac{1+e}{T_C} + \frac{e}{T_F} + \frac{S_c}{Q_B} = 0$$

$$\Leftrightarrow e \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C} \right) + \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} + \frac{S_c}{Q_B} = 0$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_B}}{\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C}} - \frac{S_c/Q_B}{\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C}} \quad (\otimes)$$

d) $e = e_{\max} \Leftrightarrow S_c = 0$: machine réversible (c f. $\downarrow$ de S_c).

A.N. Conversion en K $\rightarrow e_{\max} = 4,88$

e) $e_c = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ (qu'on peut redémontrer) : $e_c = 16,53$,

nettement supérieure !

$\otimes$ On prend soin de travailler avec des différences positives ($T_F < T_C < T_B$), c'est plus clair...

5.

Comparaison

(a) $e_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = \underline{38,46\%}$ alors que $e = \left| \frac{W}{Q_C} \right| = \underline{33,33\%}$

Machine légèrement irréversible : $e \leq e_{\max}$

(b) $W + Q_C + Q_F = 0$ donc $Q_F = -W - Q_C = |W| - |Q_C|$
 $\underline{Q_F = -1000 \text{ J}}$, négatif donc fourni.

(c) $S_c = -\frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = \underline{0,192 \text{ J/K}}$

(d) "pour une dépense identique" $\Rightarrow Q_C$ fixée

$W = -Q_C - Q_F$ et $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = -S_c \Rightarrow Q_F = -\frac{T_F}{T_C} Q_C - T_F S_c$

donc $W = -Q_C + \frac{T_F}{T_C} Q_C + T_F S_c$

$W = -Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right) + T_F S_c$ donc $W_{\text{rév}} = -Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right)$

$W_{\text{réel}} = -Q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right) + T_F S_c$

Si $W_{\text{réel}} = W_{\text{rév}} + T_F S_c$, algébriques et négatifs :

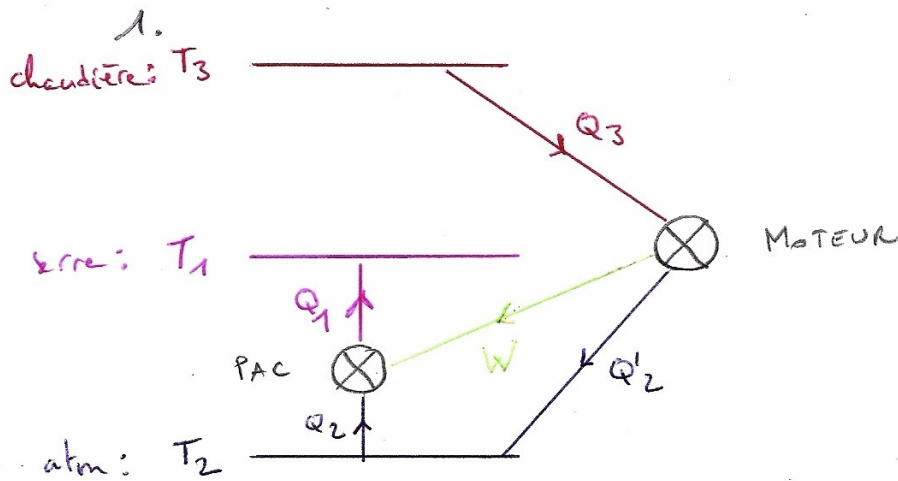
$-|W_{\text{réel}}| = -|W_{\text{rév}}| + T_F S_c$

$\Rightarrow \underline{W_{\text{réel}}^{\text{fourni}} = W_{\text{rév}}^{\text{fourni}} - T_F S_c}$

: on quantifie ainsi la
 baisse de performance
 due à l'irréversibilité.

6.

Chauffage d'une serre



2. Moteur réversible :

$$\begin{cases} W + Q_3 + Q'_2 = 0 \quad (= \Delta U) \\ \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q'_2}{T_2} = 0 \quad (\Delta S, \text{ avec } S_c = 0) \end{cases}$$

donc $W = -Q_3 \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)$ [ou bien, directement $e_{\max} = \frac{(-W)}{Q_3}$]

3. Serre :

$$\begin{cases} W' + Q_1 + Q_2 = 0 \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \end{cases} \quad : \quad \begin{aligned} Q_1 &= -W' - Q_2 \\ &= +W - Q_2 \quad \text{! connexion entre machines !} \\ &= W + Q_1 \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

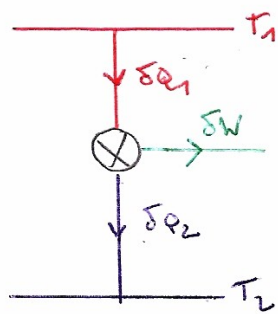
donc $Q_1 = \frac{W}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} W$

4. Énergie utile $Q_1 < 0$
Énergie facturée $Q_3 > 0$ } $\Rightarrow e = \frac{-Q_1}{Q_3}$

avec $Q_1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} W = -\frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{T_3 - T_2}{T_3} \cdot Q_3$

donc $e = \frac{T_1 (T_3 - T_2)}{T_3 (T_1 - T_2)} = 15,48$

7.

Moteur avec deux pseudo sources

a) δQ_1 : compte positivement pour le moteur, donc

1^{er} principe pour pseudo source n°1

$$dU + d\cancel{E_c} + d\cancel{E_p} = -\delta Q_1 + \delta \cancel{H}_1 + \delta \cancel{H}_0 \\ = mc dT_1$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \delta Q_1 = -mc dT_1 \\ \delta Q_2 = -mc dT_2 \end{cases} //$$

b) 2nd principe machine, infinitésimal, réversible :

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} = 0$$

$$c) \quad \frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \int_{T_{10}}^{T_F} \frac{dT_1}{T_1} = - \int_{T_{20}}^{T_F} \frac{dT_2}{T_2}$$

$$\text{Soit } [\ln T_1]_{T_{10}}^{T_F} = -[\ln T_2]_{T_{20}}^{T_F}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_F}{T_{10}} + \ln \frac{T_F}{T_{20}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_F^2}{T_{10} T_{20}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{T_F = \sqrt{T_{10} T_{20}} = 317,5 \text{ K} = 44,5^\circ \text{C}}$$

d) Une seule source à T_F et il n'existe pas de moteur monotherme.

$$e) \text{ cf. a) : } Q_1 = -mc(T_F - T_1) = 177,7 \text{ kJ}$$

$$Q_2 = -mc(T_F - T_2) = -156,8 \text{ kJ}$$

$$W = -(Q_1 + Q_2) = -20,9 \text{ kJ, fourni}$$

à l'extérieur
(signe -)

Moteur réversible

8.

Gélateur en détente

$$1. e_c = \frac{T_F}{T_c - T_F} = 6,43 \quad : \quad \underline{\alpha = 0,308}$$

$$2. \text{ Second principe : } \begin{cases} \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_c}{T_c} = -S_c & : \text{ neuf} \\ \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_c'}{T_c} = -2S_c & : \text{ usagé} \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} e = \frac{Q_F}{W} \\ e' = \frac{Q_F}{W'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_F + Q_c + W = 0 \\ Q_F + Q_c' + W' = 0 \end{cases} \quad (1^{\text{er}} \text{ principe})$$

$$W = \frac{Q_F}{e} \quad : \quad Q_F \left(1 + \frac{1}{e}\right) + Q_c = 0 \Rightarrow Q_c = -\left(1 + \frac{1}{e}\right) Q_F$$

$$\text{soit } \begin{cases} Q_F \left[\frac{1}{T_F} - \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{1}{T_c} \right] = -S_c \\ Q_F \left[\frac{1}{T_F} - \left(1 + \frac{1}{e'}\right) \frac{1}{T_c} \right] = -2S_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_F} - \left(1 + \frac{1}{e'}\right) \frac{1}{T_c} = 2 \left[\frac{1}{T_F} - \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{1}{T_c} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_c e'} = 2 \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_c} \right) + \frac{2}{T_c e}$$

$$(x T_c) \quad \Leftrightarrow T_c \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_c} \right) + \frac{1}{e'} = \frac{2}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_c - T_F}{T_F} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{1}{e_c} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{e}}$$

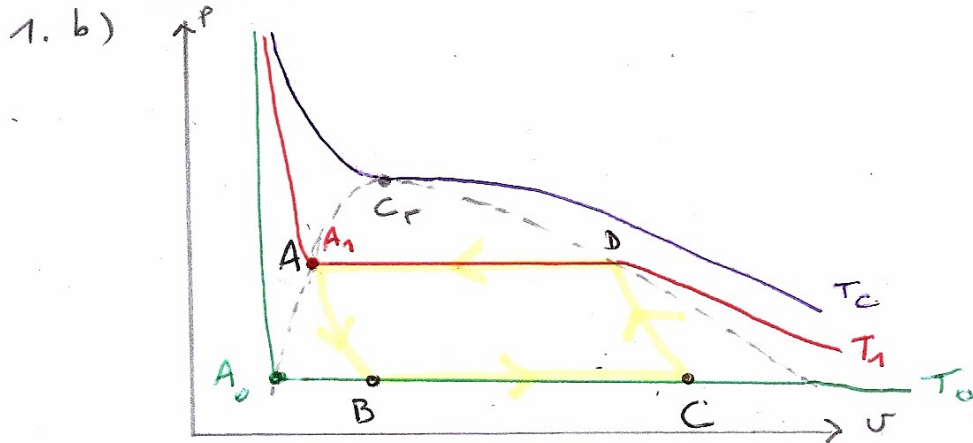
$$(x e_c) \quad \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha'} = \frac{2}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha'} = \frac{2}{\alpha} - 1 = \frac{2 - \alpha}{\alpha} \quad \#$$

$$\underline{\text{A.N: } \underline{\alpha' = 0,182}} \quad \text{donc } \underline{\underline{\hat{e} = \alpha' e_c = 1,18}}$$

9.

Étude entropique frigo

1. a) Liquide pur : def de la courbe d'ébullition



1. c) Plaque condensée $\approx$ idéale : $\Delta S = C \Delta \ln T_1$

$$\Rightarrow \underline{\Delta_1 = \Delta_0 + C_L \ln \frac{T_1}{T_0}} \quad , \text{ en divisant par } m.$$

1. d) $\Delta S = \frac{\Delta H_{\text{vap}}}{T_0}$, pour un changement d'état total

Si partiel $\Delta s = x \frac{l_0}{T_0}$: $\underline{s_{0,x} = s_0 + x \frac{l_0}{T_0}}$

2. a) $A = A_1$ donc $(\Phi \rightarrow A)$

$A \rightarrow B$: Allure des isentropiques ?? mais x_B donné ! sur le graphique.

2. b) $s_{0,x_B} = \Delta_1$: $s_0 + x_B \frac{l_0}{T_0} = \Delta_0 + C_L \ln \frac{T_1}{T_0} \Leftrightarrow \underline{x_B = \frac{C_L T_0}{l_0} \ln \frac{T_1}{T_0}}$

$s_{0,x_C} = \Delta_1 + \frac{l_1}{T_1} = \Delta_D$: $\underline{x_C = x_B + \frac{l_1}{l_0} \cdot \frac{T_0}{T_1}}$

2. c) $Q_0 = \Delta_{BC} H \text{ (isobare)} = m (x_C - x_B) l_0$: $\underline{Q_0 = m l_1 \cdot \frac{T_0}{T_1}}$

$Q_1 = \Delta_{DA} H = \underline{-m l_1}$

2. d) $Q_0 + Q_1 + W = 0$ (pas d'autres Q : $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ adiab.)

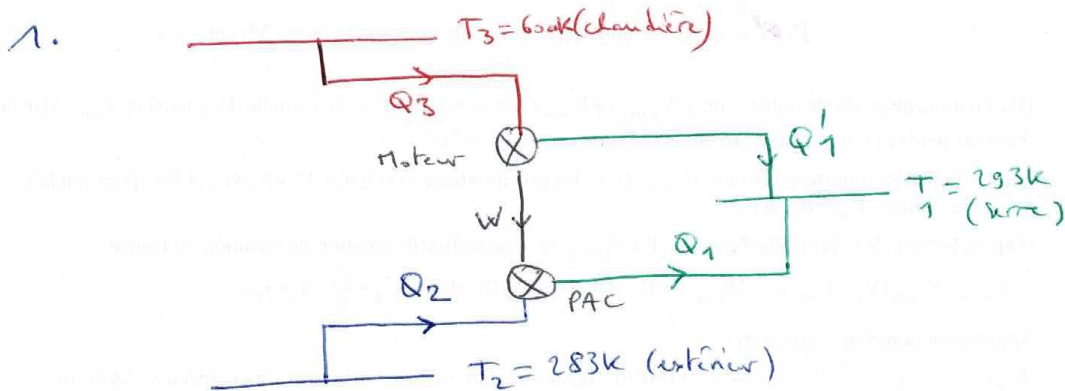
$\Rightarrow \underline{W = m l_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)}$

2. e) $e = \frac{Q_F}{W}$ avec $Q_F = Q_0$: $\underline{e = \frac{\frac{T_0}{T_1}}{1 - \frac{T_0}{T_1}} = \frac{T_0}{T_1 - T_0} = e_{\text{max}}}$

car cycle réversible : $\underline{e = 16,75}$

10. Chauffage d'une serre

Chauffage d'une serre (version "améliorée")



2. Moteur réversible : $-W = e_c Q_3$ par définition de $e = e_c$,
 avec $e_c = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ maintenant.
 Donc $W = -\left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) Q_3$ qui est bien négatif (fourni par le moteur).

3. PAC réversible $-Q_1 = e_{PAC} W_{PAC}$, car $Q_1 < 0$ et $W_{PAC} > 0$
 Or $W_{PAC} = -W$: connexion entre machines donc signes changés.

$$Q_1 = e_{PAC} W = \frac{T_1}{T_1 - T_2} W \text{ qui est bien négatif.}$$

e de Carnot.

4. utile / facturé :

$$e = \frac{|Q_1'| + |Q_1|}{Q_3} = -\frac{Q_1' + Q_1}{Q_3} \text{ avec } -Q_1' = +Q_3 + W$$

$$e = \frac{-Q_1}{Q_3} + 1 + \frac{W}{Q_3} = +\frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) + 1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)$$

$$= \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1\right) \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) + 1$$

$$= \frac{T_2 (T_3 - T_1)}{T_3 (T_1 - T_2)} + 1 = \frac{T_2 T_3 - T_1 T_2 + T_1 T_3 - T_2 T_1}{T_3 (T_1 - T_2)}$$

15,48

$$= \frac{T_1 (T_3 - T_2)}{T_3 (T_1 - T_2)} : \text{même résultat que sans la modification!}$$

Explication : l'efficacité du moteur a diminué.

11. Cycle machine

1. Cycle moteur car sens horaire, avec $P_{\max} = P_B = P_C$ et $P_{\min} = P_F$.
2. Sur $C \rightarrow F$, le volume reste constant : la loi des GP donne $\frac{T_C}{T_F} = \frac{P_C}{P_F}$: $T_C = a T_F$.

Sur l'adiabatique réversible, avec Laplace en contrôle TP (à retrouver) $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$, on obtient $T_B = T_F \left(\frac{P_F}{P_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ donc $T_B = a^{1-\frac{1}{\gamma}} T_F$.

La température a augmenté sur l'isobare : $Q_C = \Delta H = C_p \Delta T > 0$ (1er principe isobare), alors qu'elle a diminué sur l'isochore $Q_F = \Delta U = C_v \Delta T < 0$ (1er principe général), qu'on identifie avec le schéma de principe du moteur grâce à leur signe. Ce sont les seuls transferts thermiques, car il n'y en pas sur l'adiabatique (attention aux problèmes où il y a des isothermes : Q est non nul sur ces transformations).

On remarque que la machine est bien ditherme : il n'y a que 2 thermostats utilisés.

$$3. \text{ On a } e = \frac{|W|}{Q_C} = \frac{-W}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}, \text{ donc } e = 1 + \frac{C_v(T_F - T_C)}{C_p(T_C - T_B)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{a-1}{a - a^{1-\frac{1}{\gamma}}} = 1 - \frac{a-1}{\gamma a \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right)}.$$

$$4. \text{ On a } e_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{1}{a}. \text{ Donc } e_C > e \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{a-1}{\gamma a \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right)} \text{ soit à } a-1 > \gamma \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right).$$

L'inégalité n'est pas triviale. L'astuce mathématique est de constater que pour $a=1$, on a 0 de chaque côté : l'inégalité sera vérifiée si elle l'est pour les dérivées par rapport à a .

On dérive donc : $1 > -\gamma \left(-\frac{1}{\gamma}\right) a^{-1-\frac{1}{\gamma}} \Leftrightarrow 1 > a^{-1-\frac{1}{\gamma}}$, toujours vraie puisque $a > 1$ et élevé à une puissance négative.

5. Sur l'isobare et sur l'isochore, on met brutalement le système en contact avec des thermostats à des températures différentes de celle du système : il y a de la diffusion thermique, source d'irréversibilité.

Soit on calcule S_c pour chacune de ces étapes, et on somme, soit on reprend la démarche

du cours pour arriver à $e = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F S_{cr}}{Q_C}$ qui donne $S_{cr} = \frac{Q_C}{T_F} (e_C - e)$:

$$S_{cr} = \frac{C_p(T_C - T_B)}{T_F} \left(\frac{a-1}{\gamma a \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} a \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \left(\frac{a-1}{\gamma a \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right)} - \frac{1}{a} \right) \text{ soit}$$

$$S_{cr,m} = \frac{R}{\gamma - 1} a \left(a - 1 - \gamma \left(1 - a^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \right) > 0 \text{ d'après la question 4.}$$